Лекция 9.
Функтор пополнения.

На прошлой лекции мы сопоставили каждому нормированному пространству X его *пополнение*, т.е. пару $(\widetilde{X}, j)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $j\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрическое вложение с плотным образом. Сопоставление $X \mapsto \widetilde{X}$ нетрудно продолжить до функтора из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{B}an_1$. Действительно, из теоремы о продолжении по непрерывности (см. прошлую лекцию) легко следует, что для любых нормированных пространств X, Y и любого $\varphi \in \mathscr{B}(X,Y)$ существует единственный $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & \widetilde{Y} \\ X \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

При этом имеет место равенство $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Упражнение 1. Проверьте, что сопоставление $X \mapsto \widetilde{X}$, $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ задает функтор из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{B}an_1$.

Функтор, определенный в предыдущем упражнении, называется *функтором пополнения.*

На прошлой лекции мы установили, что для каждого нормированного пространства X имеет место изоморфизм функторов

$$\mathbf{h}_{\mathscr{N}orm_1}(X, \Box Y) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{B}an_1}(\widetilde{X}, Y) \tag{1}$$

от переменной Y, действующих из $\mathscr{B}an_1$ в $\mathcal{S}et$ (здесь, как и ранее, через $\Box\colon \mathscr{B}an_1 \to \mathscr{N}orm_1$ обозначен забывающий функтор). Если же зафиксировать $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an_1)$, то каждый член в формуле (1) становится контравариантным функтором от переменной X и действует из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathcal{S}et$, и на ту же формулу (1) можно смотреть (проверьте!) как на изоморфизм функторов от X. Наиболее «правильная» точка зрения такова: обе части формулы (1) — функторы двух переменных (одна — из $\mathscr{N}orm_1$, другая — из $\mathscr{B}an_1$), и эти функторы изоморфны. Конечно, чтобы придать этой фразе строгий смысл, нужно договориться, что называть функтором нескольких переменных.

Произведение категорий.

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории. Категория $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ определяется так:

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathscr{D});$$
$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}\big((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\big) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X_1,X_2) \times \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(Y_1,Y_2);$$
$$(\varphi_1,\psi_1) \circ (\varphi_2,\psi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$$

Функтор двух переменных (одна — из $\mathscr{C}$, другая — из $\mathscr{D}$) — это просто функтор, заданный на категории $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$.

Пример 1. Сопоставление $(X,Y) \mapsto \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ задает ковариантный функтор из $\mathscr{C}^\circ \times \mathscr{C}$ в $\mathcal{S}et$ (функтор морфизмов; ср. лекцию 4). Как этот функтор действует на морфизмы?

Сопряженные функторы.

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории, $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ и $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантные функторы.

Определение 1. Говорят, что функтор F является *левым сопряженным* к G, а G — *правым сопряженным* к F, если функторы

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}\bigl(F(\,\cdot\,),\,\cdot\,\bigr) \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_{\mathscr{D}}\bigl(\,\cdot\,,G(\,\cdot\,)\bigr)\colon \mathscr{D}^\circ \times \mathscr{C} \to \mathcal{S}et$$

изоморфны.

Упражнение 2. 1) Докажите, что функтор $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ обладает левым сопряженным $\iff$ для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ функтор $\mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\,\cdot\,))\colon \mathscr{C} \to \mathcal{S}et$ представим (т.е. для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ существует объект $\widetilde{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, свободный над X по отношению к G; см. лекцию 8).
1) Докажите, что функтор $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ обладает правым сопряженным $\iff$ для каждого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ функтор $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(F(\,\cdot\,), Y)\colon \mathscr{D}^\circ \to \mathcal{S}et$ представим.

Пример 2. Формулу (1) теперь можно интерпретировать так:

> *функтор пополнения $\mathscr{N}orm_1 \to \mathscr{B}an_1$ является левым сопряженным к забывающему функтору $\square\colon \mathscr{B}an_1 \to \mathscr{N}orm_1$.*

Пример 3. Рассмотрим категории $\mathscr{L}in_{\mathbb{R}}$ вещественных и $\mathscr{L}in_{\mathbb{C}}$ комплексных векторных пространств и *функтор овеществления* $\mathscr{L}in_{\mathbb{C}} \to \mathscr{L}in_{\mathbb{R}}$, сопоставляющий комплексному векторному пространству Y его же, но рассмотренное уже как вещественное векторное пространство $Y_{\mathbb{R}}$. (По сути дела, овеществление — это тоже своего рода забывающий функтор.) У этого функтора есть левый сопряженный, а именно, *функтор комплексификации* $X \mapsto X_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} X$, действующий из $\mathscr{L}in_{\mathbb{R}}$ в $\mathscr{L}in_{\mathbb{C}}$.

Вообще, функторы, левые сопряженные к тем или иным забывающим (или «частично забывающим») функторам, встречаются в разных областях математики довольно часто. Вот еще несколько примеров:

Упражнение 3. Найдите левые сопряженные к следующим забывающим функторам:
1) $\mathscr{G}r \to \mathcal{S}et$ (ответ: свободная группа);
2) R-mod $\to \mathcal{S}et$, где R — произвольное кольцо (ответ: свободный модуль);
3) $\mathscr{A}lg_k \to \mathscr{L}in_k$ (ответ: тензорная алгебра).

Еще один классический пример:

Пример 4. Пусть $\mathscr{L}ie_k$ — категория алгебр Ли над заданным полем k. Рассмотрим функтор $\mathrm{Lie}\colon \mathscr{A}lg_k \to \mathscr{L}ie_k$, сопоставляющий ассоциативной алгебре A ее же, но рассмотренную как алгебру Ли относительно операции $[a,b] = ab - ba$. У этого функтора есть левый сопряженный, сопоставляющий каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ее *универсальную обертывающую алгебру* $U(\mathfrak{g})$.

Впрочем, не у всех забывающих функторов есть левые сопряженные:

Упражнение 4. Докажите, что забывающий функтор $\mathscr{B}an \to \mathcal{S}et$ не обладает левым сопряженным (иными словами, не по всякому множеству можно построить «свободное банахово пространство»).

Однако если вместо $\mathscr{B}an$ взять категорию $\mathscr{B}an_1$, то «свободные банаховы пространства» тут же появятся:

Упражнение 5. Рассмотрим функтор $B_1 \colon \mathscr{B}an_1 \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий каждому банахову пространству X его замкнутый единичный шар. Докажите, что у этого функтора есть левый сопряженный.
Указание. Искомый функтор сопоставляет каждому множеству S банахово пространство $\ell^1(S)$.

Интеграл Лебега: вводные замечания.

Вспомним, что на прошлой лекции остался невыясненным вопрос о том, как устроено пополнение пространств $C[a,b]$ с «интегральной» нормой $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Чтобы ответить на этот вопрос, нам придется на время отвлечься от функционального анализа как такового и поговорить об интеграле Лебега. Сложность здесь состоит в том, что (неполное) нормированное пространство $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ заранее не вложено ни в какое «хорошее» полное пространство $\mathscr{X}$, состоящее, скажем, из функций или каких-нибудь других «осязаемых» объектов. Впрочем, из общих соображений нам известно, что пополнение всегда существует. Обозначим пополнение пространства $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ через $L^1[a,b]$ и заметим, что интеграл Римана $I \colon f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$ является непрерывным линейным функционалом на $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$. Из теоремы о продолжении по непрерывности (см. прошлую лекцию) немедленно следует, что существует единственный функционал $\widetilde{I}$ на $L^1[a,b]$, продолжающий I. Это и есть *интеграл Лебега.*

Недостаток такого определения пространства $L^1[a,b]$ и интеграла Лебега в том, что с ним крайне сложно работать. Поэтому обычно поступают иначе и вместо обычного пополнения используют конструкцию «монотонного пополнения», которая позволяет описать $L^1[a,b]$ более явно как некоторое пространство «интегрируемых функций» и заодно доказать ряд важных свойств интеграла Лебега (например, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла). Приступим теперь к реализации этой программы.

Интегрирование на компактных пространствах.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Для каждого множества Y через Y^X мы обозначаем множество всех отображений из X в Y. Обычно в качестве Y у нас будет выступать или $\mathbb{R}$, или «расширенная прямая» $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, или ее «отрезок» $[0, +\infty]$. (Сразу предупредим, что при построении теории интегрирования нам иногда придется рассматривать функции, принимающие значение $+\infty$). В дальнейшем вмсето $+\infty$ мы будем писать просто ∞ (поскольку «минус бесконечность» нам не понадобится). Договоримся о следующих «действиях» с бесконечностью:

1) $c + \infty = \infty + \infty = \infty$ $(\forall c \in \mathbb{R})$;
2) $c \cdot \infty = \infty$ $(\forall c > 0)$;

3) $0 \cdot \infty = 0$;
4) $c < \infty$ ($\forall c \in \mathbb{R}$).

Для функций $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ мы будем писать $f \geqslant g$, если $f(x) \geqslant g(x)$ при всех $x \in X$.

Как всегда, через $C(X)$ мы обозначаем банахово пространство непрерывных функций на X, снабженное sup-нормой.

Определение 2. *Интегралом* на X называется непрерывный линейный функционал I на $C(X)$, который *положителен* в том смысле, что $I(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$.

Пример 5. Основной пример, который полезно будет в дальнейшем держать в голове, таков: $X = [a, b]$, а I — интеграл Римана на $C[a, b]$.

Упражнение 6. Докажите, что положительный линейный функционал на $C(X)$ *автоматически* непрерывен.

Итак, «исходные данные» для построения теории интегрирования — это компакт X и положительный линейный функционал (интеграл) $I \in C(X)^*$.

Общая схема последующих построений такова: мы будем постепенно «доопределять» интеграл I на тех функциях, на которых он вначале был не определен. Сперва мы определим его на тех функциях, которые, грубо говоря, получаются как пределы монотонно возрастающих последовательностей непрерывных функций.

Определение 3. Для заданного подмножества $H \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ его *верхней огибающей* назовем функцию $\sup H \colon x \mapsto \sup\{h(x) \,:\, h \in H\}$.

Определение 4. Функция $\varphi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу*, если множество $\varphi^{-1}((c, \infty])$ открыто в X для любого $c \in \mathbb{R}$.

Разумеется, любая (конечная) непрерывная функция полунепрерывна снизу, но обратное неверно (приведите пример!)

Положим $\Phi(X) = \{\varphi \colon X \to [0, \infty] \,:\, \varphi \text{ полунепрерывна снизу}\}$.

Упражнение 7. Докажите следующие свойства множества $\Phi(X)$:
1) $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(X) \implies \varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi(X)$;
2) $\varphi \in \Phi(X),\ \lambda \geqslant 0 \implies \lambda\varphi \in \Phi(X)$;
3) $H \subset \Phi(X) \implies \sup H \in \Phi(X)$;
4) $H \subset \Phi(X)$ — конечное множество $\implies \inf H \in \Phi(X)$.

Упражнение 8. Убедитесь в том, что свойство 4) из предыдущего упражнения для бесконечного H может не выполняться.

Для каждой $\varphi \in \Phi(X)$ положим $S_\varphi = \{f \in C(X) \,:\, 0 \leqslant f \leqslant \varphi\}$.

Упражнение 9. Докажите, что $\varphi = \sup S_\varphi$ для любой $\varphi \in \Phi(X)$.
Указание. Воспользуйтесь тем, что для каждого замкнутого $F \subset X$ и каждой $x \notin F$ найдется $f \in C(X)$, такая, что $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$.

Замечание 1. Если $X = [a, b]$ — отрезок в $\mathbb{R}$, то можно доказать, что любая $\varphi \in \Phi(X)$ является пределом монотонно возрастающей последовательности непрерывных функций (см. Натансон, «Теория функций вещественной переменной»). Впрочем, этот факт нам в дальнейшем не понадобится (в отличие от предыдущего упражнения).

Упражнение 9 и п. 3) из упражнения 7 показывают, что $\Phi(X)$ — это, грубо говоря, нечто вроде «монотонного замыкания» множества $C(X)_{\geqslant 0}$ неотрицательных непрерывных функций.

Первый этап продолжения I: продолжение «по монотонной непрерывности».

Наша ближайшая цель — продолжить интеграл I на $\Phi(X)$ так, чтобы обеспечить выполнение «равенства» $I \circ \sup = \sup \circ I$ («монотонную непрерывность»). С учетом упражнения 9, единственный способ сделать это таков:

Определение 5. Зададим отображение $I' \colon \Phi(X) \to [0, \infty]$ формулой

$$I'(\varphi) = \sup\{I(f) \,:\, f \in S_\varphi\}.$$

Упражнение 10. Докажите следующие свойства интеграла I':
1) $I'(f) = I(f)$, если $f \in C(X), f \geqslant 0$;
2) $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \implies I'(\varphi_1) \leqslant I'(\varphi_2)$;
3) $\lambda \geqslant 0,\ \varphi \in \Phi(X) \implies I'(\lambda\varphi) = \lambda I'(\varphi)$.

Чтобы доказать аддитивность интеграла I', а также обещанную «монотонную непрерывность», нам понадобится один общетопологический факт.

Определение 6. Назовем семейство $H \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ *направленным*, если для любых $h_1, h_2 \in H$ найдется $h \in H$ такой, что $h \geqslant \sup\{h_1, h_2\}$.

Теорема 1 (Дини). *Пусть $H \subset C(X)$ — направленное множество, и пусть $f \in C(X)$ такова, что $f \leqslant \sup H$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_\varepsilon \in H$, такая, что $f \leqslant h_\varepsilon + \varepsilon$.*

Упражнение 11. Докажите теорему Дини.

Лемма 1. *Для любого направленного семейства $H \subset \Phi(X)$ справедливо равенство $I'(\sup H) = \sup_{h \in H} I'(h)$.*

Доказательство. Положим $\varphi = \sup H$. Ясно (см. упр. 10, п. 2), что $I'(\varphi) \geqslant \sup_{h \in H} I'(h)$. Чтобы доказать противоположное неравенство, мы должны проверить, что для каждой $f \in C(X)$, $0 \leqslant f \leqslant \varphi$, выполнено $I(f) \leqslant \sup_{h \in H} I'(h)$.

Введем множество $H' = \bigcup_{h \in H} S_h$. Ясно, что оно направлено. Кроме того, для каждого $x \in X$ имеем:

$$f(x) \leqslant \varphi(x) = \sup_{h \in H} h(x) = \sup_{h \in H} \sup_{g \in S_h} g(x) = \sup_{g \in H'} g(x) = (\sup H')(x).$$

Следовательно, $f \leqslant \sup H'$. По теореме Дини, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $g_\varepsilon \in H'$, такая, что $f \leqslant g_\varepsilon + \varepsilon$. Подберем $h_\varepsilon \in H$ так, чтобы $g_\varepsilon \leqslant h_\varepsilon$ (см. определение множества H'). Тогда

$$I(f) \leqslant I(g_\varepsilon) + \varepsilon I(1) \leqslant I'(h_\varepsilon) + \varepsilon I(1) \leqslant \sup_{h \in H} I'(h) + \varepsilon I(1).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, это доказывает требуемое неравенство $I(f) \leqslant \sup_{h\in H} I'(h)$ для любой $f \in C(X)$, $0 \leqslant f \leqslant \varphi$. Сопоставляя это со сказанным ранее, окончательно получаем $I(\varphi) = \sup_{h\in H} I'(h)$, как и требовалось. $\square$

Упражнение 12. Докажите, что $I'(\varphi_1+\varphi_2) = I'(\varphi_1)+I'(\varphi_2)$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(X)$.

Второй этап продолжения I: «заполнение дыр».

Множество полунепрерывных снизу функций $\Phi(X)$ — не очень подходящий кандидат на роль пространства интегрируемых функций. Во-первых, на некоторых из них интеграл I' заведомо равен ∞ (например, на функции, тождественно равной ∞). А во-вторых, есть много функций, которые «хочется» назвать интегрируемыми по Лебегу (хотя бы потому, что они интегрируемы по Риману), но которые не являются полунепрерывными снизу. Поэтому следующим шагом в нашей конструкции мы доопределим интеграл на *всех* неотрицательных функциях, а затем ограничим его на множество тех функций, от которых он конечен.

Определение 7. Зададим отображение $I'' \colon [0,\infty]^X \to [0,\infty]$ формулой

$$I''(f) = \inf\{I'(\varphi) \,:\, \varphi \in \Phi(X),\, \varphi \geqslant f\}.$$

Упражнение 13. Докажите следующие свойства интеграла I'':
1) $I''(\varphi) = I'(\varphi)$ для любой $\varphi \in \Phi(X)$;
2) $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \implies I''(f_1) \leqslant I''(f_2)$;
3) $\lambda \geqslant 0,\ f \in [0,\infty]^X \implies I''(\lambda f) = \lambda I''(f)$;
4) $I''(f_1+f_2) \leqslant I''(f_1) + I''(f_2)$.

Замечание 2. Вообще говоря, может оказаться, что $I''(f_1+f_2) \neq I''(f_1)+I''(f_2)$ (пример будет потом).

Теорема 2 (о монотонной сходимости-I). *Если $f(x) = \lim_n f_n(x)$ для любого x, причем $f_n \leqslant f_{n+1}$ для каждого n, то $I''(f) = \lim_n I''(f_n)$.*

Доказательство. Ясно, что $I''(f) \geqslant \lim_n I''(f_n)$ (см. упр. 13). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что $I''(f) \leqslant \lim_n I''(f_n) + \varepsilon$. Пользуясь определением I'', для каждого n подберем $\psi_n \in \Phi(X)$ так, чтобы

$$\psi_n \geqslant f_n; \quad I'(\psi_n) \leqslant I''(f_n) + \varepsilon/2^n. \tag{2}$$

Далее, положим $\varphi_n = \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \psi_k \in \Phi(X)$. Нам достаточно проверить, что

$$I'(\varphi_n) \leqslant I''(f_n) + \varepsilon \quad \text{для всех } n. \tag{3}$$

В самом деле, пусть (3) выполнено. Положим $\varphi = \sup_n \varphi_n$. Тогда $\varphi \geqslant \sup_n f_n = f$, поэтому из леммы 1 и формулы (3) получаем:

$$I''(f) \leqslant I'(\varphi) = \sup_n I'(\varphi_n) = \lim_n I'(\varphi_n) \leqslant \lim_n I''(f_n) + \varepsilon,$$

как и требовалось. Итак, нам осталось проверить формулу (3). Доказывать ее удобно по индукции, причем в следующей «усиленной» форме:

$$I'(\varphi_n) \leqslant I''(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n). \tag{4}$$

При $n = 1$ формула (4) сводится к (2). Пусть она верна для некоторого n. Заметим, что

$$\varphi_{n+1} = \max\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}; \quad f_n \leqslant \min\{\varphi_n, \psi_{n+1}\},$$

поэтому

$$I'(\varphi_{n+1}) = I'(\max\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}); \quad I''(f_n) \leqslant I'(\min\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}). \tag{5}$$

Отметим также очевидное равенство $\max\{a, b\} + \min\{a, b\} = a + b$, справедливое для любых функций a, b. Складывая выражения из (5), получаем, что

$$\begin{aligned} I'(\varphi_{n+1}) + I''(f_n) &\leqslant I'(\max\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}) + I'(\min\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}) = \\ &= I'(\max\{\varphi_n, \psi_{n+1}\} + \min\{\varphi_n, \psi_{n+1}\}) = I'(\varphi_n + \psi_{n+1}) = I'(\varphi_n) + I'(\psi_{n+1}). \end{aligned}$$

Вместе с (2) и (4) это дает следующее:

$$\begin{aligned} I'(\varphi_{n+1}) &\leqslant I'(\varphi_n) + I'(\psi_{n+1}) - I''(f_n) \leqslant \\ &\leqslant I''(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n) + I''(f_{n+1}) + \varepsilon/2^{n+1} - I''(f_n) = I''(f_{n+1}) + \varepsilon(1 - 1/2^{n+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость формулы (4) для некоторого n влечет ее справедливость для $n + 1$. Стало быть, она верна для всех n. Дальше ясно. □

Где об этом почитать. О сопряженных функторах см., например, книгу Гельфанда и Манина «Методы гомологической алгебры», Касивара и Шапира «Пучки на многообразиях», Букура и Деляну «Введение в теорию категорий и функторов». О теории интегрирования в том виде, в котором мы ее излагаем («подход Даниэля», при котором мера строится исходя из понятия интеграла, а не наоборот) подробно написано в книге Наймарка «Нормированные кольца», Хьюитта и Росса «Абстрактный гармонический анализ», Люмиса «Введение в абстрактный гармонический анализ». Другой (более классический) подход, принадлежащий самому Лебегу (где первичным является понятие меры, а не интеграла) изложен, например, в книге Колмогорова и Фомина «Введение в теорию функций и функциональный анализ» и Дьяченко и Ульянова «Мера и интеграл».