Линейный функциональный анализ

Весенний семестр 2002 г.

Задачи к экзамену.

Задача 1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, и что вложение ℓ^p в ℓ^q непрерывно.

Задача 2. Пусть c_{00} — пространство *финитных* последовательностей (т.е. тех последовательностей $x = (x_i)$, для которых $x_i = 0$ при достаточно больших i). Докажите, что при $p \neq q$ нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} неэквивалентны.

Задача 3. Пусть X — топологическое пространство, $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на X с sup-нормой, $C_0(X)$ — пространство функций на X, исчезающих на бесконечности. Докажите, что $C_b(X)$ замкнуто в $\ell^\infty(X)$, а $C_0(X)$ — в $C_b(X)$.

Задача 4. Докажите, что при $1 < p < +\infty$ и $n \geqslant 2$ пространство $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ не изоморфно $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ и не изоморфно $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ в $\mathscr{N}orm_1$.

Задача 5. Докажите, что следующие свойства нормированного пространства X эквивалентны:
1) Из равенства $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$ следует, что x и y линейно зависимы.
2) Единичная сфера $\{x \in X\,;\, \|x\| = 1\}$ не содержит (нетривиальных) отрезков.
(Такие пространства называются *строго нормированными*).

Задача 6. Приведите пример банахова пространства X и функционала $f \in X^*$, не достигающего нормы (т.е. такого, что не существует вектора x, $\|x\| = 1$, для которого $|f(x)| = \|f\|$).

Задача 7. Пусть $f \in C[a,b]$ — фиксированная функция, и пусть $X = (C[a,b], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Зададим оператор $T_f \colon X \to X$ формулой $(T_f g)(t) = f(t)g(t)$ $(g \in X,\ t \in [a,b])$. Найдите $\|T_f\|$.

Задача 8. Пусть $X = (C[a,b], \|\cdot\|_1)$. Зададим оператор $T \colon X \to X$ формулой $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Найдите $\|T\|$.

Задача 9. Докажите, что линейный функционал f на нормированном пространстве ограничен $\iff$ его ядро замкнуто.

Задача 10. Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — замкнутое линейное подпространство и $x \notin X_0$. Докажите, что существует $f \in X^*$ такой, что $f|_{X_0} = 0$ и $f(x) \neq 0$.

Задача 11. Докажите, что банахово пространство $\ell^\infty(S)$ 1-инъективно для любого множества S.

Задача 12. Докажите, что любое банахово пространство X изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S.

Задача 13. Докажите, что если банахово пространство X инъективно, то оно C-инъективно для некоторой константы $C \geqslant 1$.

Задача 14. Пусть $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ — плоскость и $X_0 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x,0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

Задача 15. Является ли функтор сопряжения $\mathscr{N}orm \xrightarrow{*} \mathscr{N}orm$ строгим? Является ли он полным?

Задача 16. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно. Верно ли обратное?

Задача 17. Докажите, что c_0, ℓ^1 и $C[a,b]$ нерефлексивны.

Задача 18. Пусть $f \in X^*$ — ненулевой функционал и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Тогда для существования 0-перпендикуляра к X_0 необходимо и достаточно, чтобы f достигал нормы.

Задача 19. Докажите, что в банаховом пространстве любая убывающая последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение.

Задача 20. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

Задача 21. Докажите полноту пространств $\ell^\infty(S)$ (S — любое множество), $C_b(X)$, $C_0(X)$ (X — топологическое пространство), ℓ^p (для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $C^n[a,b]$.

Задача 22. Докажите, что следующие пространства неполны: $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ при $p < \infty$; ℓ^p с нормой, индуцированной из ℓ^q при $q > p$; $C^n[a,b]$ (для $n \geqslant 1$) с нормой из $C^m[a,b]$ при $m < n$ (в частности, с sup-нормой).

Задача 23. Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.

Задача 24. Докажите, что следующие свойства линейного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ эквивалентны:

1) T открыт;

2) $T(B_1^\circ) \supset B_\varepsilon^\circ$ для некоторого $\varepsilon > 0$;

3) Существует $C > 0$ такое, что для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий условиям $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.

Задача 25. Докажите, что дополняемое подпространство нормированного пространства замкнуто.

Задача 26. Пусть T_λ — диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Докажите, что T_λ топологически инъективен $\iff$ он сюръективен $\iff$ он открыт $\iff$ он является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ $\iff$ $\inf_n |\lambda_n| > 0$.

Задача 27. Пусть T_f — оператор умножения на функцию $f \in C[a,b]$, действующий в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$. Докажите, что T_f топологически инъективен $\iff$ он сюръективен $\iff$ он открыт $\iff$ он является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ $\iff$ f не обращается в нуль ни в одной точке.

Задача 28. Опишите мономорфизмы и эпиморфизмы в категориях $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$, $\mathscr{B}an_1$.

Задача 29. Опишите строгие мономорфизмы и строгие эпиморфизмы в тех же категориях.

Задача 30. Придумайте пример ограниченного оператора T между банаховыми пространствами, для которого $T(B_1^\circ) = B_1^\circ$, но $T(B_1) \neq B_1$.

Задача 31. Докажите, что линейный оператор между банаховыми пространствами, имеющий замкнутый график, непрерывен.

Задача 32. Придумайте пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

Задача 33. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен, и что T изометричен $\iff$ T^* коизометричен.

Задача 34. Пусть X, Y — банаховы пространства. Докажите, что если оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ сюръективен, то T^* топологически инъективен. Докажите, что если T коизометричен, то T^* изометричен.

Задача 35. Докажите, что факторпространство банахова пространства по замкнутому подпространству полно.

Задача 36. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — линейное подпространство. Докажите, что $\overline{X_0} = {}^\perp(X_0^\perp)$.

Задача 37. Придумайте пример банахова пространства X и замкнутого линейного подпространства $Y_0 \subset X^*$ такого, что $({}^\perp Y_0)^\perp \neq Y_0$.

Задача 38. Докажите, что для любого замкнутого линейного подпространства $X_0 \subset X$ имеют место изометрические изоморфизмы $(X/X_0)^* \cong X_0^\perp$ и $X_0^* \cong X^*/X_0^\perp$.

Задача 39. Пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Докажите, что $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$, $\overline{\operatorname{Im} T} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$, $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$, $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Задача 40. Приведите пример оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, такого, что $\overline{\operatorname{Im} T^*} \neq (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Задача 41. Докажите, что забывающий функтор $\square\colon \mathscr{B}an \to \mathscr{S}et$ не обладает левым сопряженным (т.е. что в категории $\mathscr{B}an$ не существует «свободных банаховых пространств»).

Задача 42. Пусть $B_1\colon \mathscr{B}an_1 \to \mathscr{S}et$ — функтор, сопоставляющий банахову пространству его единичный шар. Постройте левый сопряженный функтор («свободные банаховы пространства» в $\mathscr{B}an_1$ существуют!)

Задача 43. Пусть X — компакт и I — интеграл на X (т.е. положительный линейный функционал на $C(X)$). Докажите, что I непрерывен.

Задача 44. Пусть X — компакт и $\varphi \geqslant 0$ — полунепрерывная снизу функция на X. Докажите, что $\varphi = \sup\{f \in C(X) \,:\, 0 \leqslant f \leqslant \varphi\}$.

Задача 45. Пусть X — компакт, $H \subset C(X)_{\geqslant 0}$ — направленное множество. Пусть $f \in C(X)_{\geqslant 0}$ такова, что $f \leqslant \sup H$. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $h_\varepsilon \in H$, такая, что $f \leqslant h_\varepsilon + \varepsilon$.

Задача 46. Придумайте пример функции f на $[0,1]$, интегрируемой по Риману в несобственном смысле, но не интегрируемой по Лебегу.

Задача 47. Пусть X — компакт, I — интеграл на $C(X)$ и $f \geqslant 0$ — функция на X. Докажите, что $f \in \mathscr{L}^p(X,I) \iff f^p \in \mathscr{L}^1(X,I)$.

Задача 48. Пусть $\overline{\mu}$ — внешняя мера, построенная по интегралу I на компакте X. Докажите, что $\overline{\mu}(A) = \inf\{\overline{\mu}(U) \,:\, U \supset A,\, U\,\text{открыто}\}$.

Задача 49. Пусть $\overline{\mu}$ — внешняя мера, построенная по интегралу I на компакте X. Докажите, что класс измеримых множеств образует σ-алгебру и что $\overline{\mu}$ — σ-аддитивная мера на ней.

Задача 50. Пусть X — компакт, $\{x_i\} \subset X$ — не более чем счетное подмножество, $\{a_i\}$ — набор положительных чисел, такой, что ряд $\sum_i a_i$ сходится. Зададим интеграл $I \in C(X)^*$ формулой $I(f) = \sum_i a_i f(x_i)$. Опишите класс измеримых множеств и соответствующую меру μ.

Задача 51. Придумайте пример последовательности функций $\{f_n\}$ и функции f на $[0,1]$, удовлетворяющих условиям теоремы Фату, для которых $I(f) < \sup_n I(f_n) = \lim_n I(f_n)$.

Задача 52. Придумайте пример последовательности $\{f_n\}$ интегрируемых функций на $[0,1]$, таких, что последовательность $\{I(f_n)\}$ ограничена, и поточечно сходящуюся к неинтегрируемой функции.

Задача 53. Пусть X — компакт и $B(X)$ — пространство ограниченных борелевских функций с sup-нормой. Докажите, что линейная оболочка индикаторов борелевских множеств плотна в $B(X)$.

Задача 54. Пусть X — компакт, I — интеграл на X и $f \in B(X)$. Зададим оператор $T_f\colon L^2(X,I) \to L^2(X,I)$ формулой $(T_f g)(t) = f(t)g(t)$. Найдите условия на f, необходимые и достаточные для того, чтобы T_f был (1) инъективным; (2) топологически инъективным; (3) сюръективным; (4) обратимым.

Задача 55. Пусть H — предгильбертово пространство. Докажите, что в неравенстве Коши-Буняковского $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ равенство может достигаться лишь при линейно зависимых x, y.

Задача 56. Докажите, что норма на пополнении предгильбертова пространства задается единственным скалярным произведением, продолжающим исходное. (Иначе говоря, пополнение предгильбертова пространства — гильбертово пространство).

Задача 57. Докажите, что норма на ℓ^p и $L^p[a,b]$ (при $p \neq 2$), на c_0, на $C[a,b]$ не задается скалярным произведением (т.е. что ни одно из перечисленных пространств не изоморфно в $\mathscr{B}an_1$ никакому гильбертову пространству).

Задача 58. Докажите, что норма на каждом из пространств из предыдущей задачи не эквивалентна норме, задаваемой скалярным произведением (и поэтому они не изоморфны гильбертову пространству в категории $\mathscr{B}an$).

Задача 59. Докажите сепарабельность гильбертовых пространств $L^2[0,1]$ и $L^2(\mathbb{R})$.

Задача 60. Придумайте пример предгильбертова пространства H, замкнутого линейного подпространства $H_0 \subset H$ и вектора $x \in H$, не имеющего проекции на H_0.

Задача 61. Выведите неравенство Коши-Буняковского из неравенства Бесселя.

Задача 62. Пусть U — изометричный оператор между предгильбертовыми пространствами. Докажите, что он сохраняет скалярные произведения.

Задача 63. Пусть H — гильбертово пространство, H_0 — замкнутое линейное подпространство и $f_0 \in H_0^*$ — непрерывный функционал. Докажите, что функционал $f \in H^*$, продолжающий f_0 и имеющий ту же норму (который существует ввиду теоремы Хана-Банаха) — единственный.

Задача 64. Подмножество M нормированного пространства X называется тотальным, если его линейная оболочка плотна в X.
1) Докажите, что подмножество M гильбертова пространства тотально $\iff$ $M^\perp = \{0\}$.
2) Верно ли это в предгильбертовом пространстве?

Задача 65. 1) Докажите, что ортонормированная система в гильбертовом пространстве тотальна $\iff$ она максимальна.
2) Верно ли это в предгильбертовом пространстве?

Задача 66. Пусть H — гильбертово пространство.
1) Докажите, что оператор $P \in \mathscr{B}(H)$ — ортопроектор $\iff$ $P^2 = P = P^*$.
2) Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ изометричен $\iff$ $T^*T = \mathbf{1}_H$.
3) Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ коизометричен $\iff$ $TT^* = \mathbf{1}_H$ $\iff$ существует замкнутое линейное подпространство $H_0 \subset H$ такое, что $T|_{H_0} \colon H_0 \to H$ унитарен и $T|_{H_0^\perp} = 0$.

Задача 67. Оператор V в гильбертовом пространств H называется *частичной изометрией*, если $(V^*V)^2 = V^*V$. Дайте геометрическое описание таких операторов.

Задача 68. Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$, $H_0 \subset H$ — замкнутое подпространство и P — ортопроектор на H_0. Запишите в виде алгебраического тождества (включающего T и P) следующие утверждения: (1) $T(H_0) \subset H_0$; (2) $T(H_0) \subset H_0$ и $T(H_0^\perp) \subset H_0^\perp$.

Задача 69. Рассмотрим следующие три оператора: (1) «двусторонний сдвиг» T_b в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$; (2) оператор T_e в $L^2[-\pi,\pi]$, действующий по правилу $(T_e f)(t) = e^{it} f(t)$; (3) оператор T_z в $L^2(\mathbb{T})$ (где $\mathbb{T}$ — единичная окружность в $\mathbb{C}$, мера на которой — «длина дуги», деленная на 2π), действующий по правилу $(T_z f)(z) = z f(z)$. Докажите унитарную эквивалентность этих операторов.

Задача 70. Пространство Харди H^2 определяется так:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \langle f, z^n \rangle = 0 \quad \forall n < 0\} \subset L^2(\mathbb{T}).$$

Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим $\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2\, dt\right)^{1/2}$.

1) Докажите, что определение H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < \infty\}$$

2) Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 унитарно эквивалентен оператору T_z (см. предыдущую задачу) в H^2.