# Погруженые поверхности

П.М.Ахметьев и Ю.П.Соловьев *

e-mail: pmakhmet@mi.ras.ru

## Содержание

### Введение

Основные определения. Погружения поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и основная проблема их классификации с точностью до регулярной гомотопии и кобордизма. Представление погруженной поверхности семейством сечений. Примеры поверхностей (действующие лица).

1. поверхность Боя
2. сфера Морена
3. тор Понтрягина
4. тор Константинова
5. сфера Милнора

### Элементы дифференциальной топологии и теории гомотопий

A. Особые точки проекции погруженной поверхности на плоскость, (складки и сборки) построенные по семейству сечений. $I$-структура погруженной поверхности и методы ее построения.

B. Определение групп $Imm^{fr}(n,1)$ и $Imm^{sf}(n,1)$. Геометрическое описание их образующих при $n = 0, 1, 2$.

C. Конструкция Понтрягина -Тома для кобордизма вложенных многообразий с заданной структурой нормального расслоения. Принцип Смейла-Хирша и теорема Уэлса. Классифицирующие пространства $Q\mathbb{RP}^{\infty}$, $QS^1$ для групп $Imm^{sf}(n,1)$, $Imm^{fr}(n,1)$ кобордизма погружений. Стабильные гомотопические группы сфер $\Pi_n$ как группы кобордизма погружений ориентированных $n$-многообразий в евклидовом $n+1$-пространстве.

*Работа авторов выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00578)

### Элементы алгебраической топологии

А. Алгебра Стинрода. Соотношения Адема. Высшие опрераторы Бокштейна. Метод убивающих модулей для вычисления 2-компонент групп кобордизмов $Imm^{fr}(n,1)$ и $Imm^{sf}(n,1)$, $n=1,2$.

В. Композиции в стабильных гомотопических группах сфер. Детектирование композиции $S^{n+2} \to S^{n+1} \to S^n$ соотношением Адема $Sq^2Sq^2 + Sq^3Sq^1 = 0$.

### Квадратичные формы и их простейшие инварианты. Элементарные приложения в геометрической топологии

А. Классификация классов регулярной гомотопии погруженой поверхности (ориентированной) классом изоморфизма $\mathbb{Z}/4$-квадратичной формы ($\mathbb{Z}/2$-квадратичной формы). Классификация классов кобордизма погруженой поверхности (ориентированной) инвариантом Браун $\mathbb{Z}/4$-квадратичной формы (Arf- инвариантом $\mathbb{Z}/2$-квадратичной формы). Примеры вычислений.

В. Проблема распроектирования и аппроксимации. $Arf$-инвариант как частичное препятствие к задаче распроектирования.

### Элементы теории особенностей

А. Устойчивые отображения $M^2 \to \mathbb{R}^2$. Особенности $I$-структуры для отображений $M^2 \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ Дискриминант особенностей $I$-структуры для отображений. Выражение класса кобордизма $Imm^{sf}(2,1)$ инвариантом Васильева 1 порядка $I$ структуры. Пример вычисления класса кобордизма.

В. Сферические функции и метод годографа. Лежандровы многообразия и отображения. Особенности лежандровых поверхностей и их однопараметрических деформаций. Отображение Лежандра сферической функции, принцип "исчезновения"диполя. Теорема Максвелла для пространства квадруполей.

С. Пространство псевдоизотопий и метод вычисления его гомотопических групп. Теорема Серфа о пространстве псевдоизотопий. Пространство функций с умеренными особенностями. Пример В.И.Арнольда.

## Список Литературы

[M-T] Р.Мошер, М. Тангора. *Когомологические операции и их приложение в теории гомотопий*, Москва Мир 1970.

[A1] Арнольд В.И., Варченко А.Н. Гуссейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений* Наука Москва 1982.

[A2] Арнольд В.И., *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series Vol. 5, AMS 1994.

[A3] Арнольд В.И., *Пространства функций с умеренными особенностями*, Функц. Анализ и прил. т.23, вып.3 (1989) 1-10.

[G-M] Guillou L., Marin A. *В поисках утраченной топологии*, Мир 1989, Москва.

# 1 Введение

Основным предметом нашего изучения являются поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, главным образом, компактные не имеющие края. Мы начнем со случая, когда поверхность расположена в пространстве с самопересечениями, но без локальных особенностей, т.е. без точек, в которых поверхность не допускает касательной плоскости. Такие поверхности называются погруженными. Далее изучаются также поверхности с самопересечениями и особенностями, которые естественно возникают в той или иной задаче. Такие поверхности можно называть погружеными поверхностями особенностями.

Авторы постарались обрисовать разнообразные аспекты применений поверхностей в современной топологии и геометрии на примерах математических конструкций, которые в этой связи возникают. К сожалению, наши планы не смогли быть реализованы в полной мере, поскольку мы не успели представить применения поверхностей с самопересечениями в римановой геометрии и для минимальных пленок.

Поверхность, рассмотренная как такая, без учета ее расположения в объемлющем пространстве – это простейший содержательный пример многообразия. Напомним классификацию замкнутых компактных поверхностей с точностью до взаимно-однозначного непрерывного соответствия.

Поверхности делятся на ориентируемые и неориентируемые. Ориентированную поверхность можно представлять себе как гладкую границу области в пространстве. Если ввести целочисленную функцию на поверхностях: эйлерову характеристику, то окажется что ориентируемые поверхности одинаковы если и только если их эйлеровы характеристики совпадают. Эйлерова характеристика принимает все четные целые значения, не превышающие 2. Если, например, повpхность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1}$$

т.е. представляет собой границу шара радиуса 1, то ее эйлерова характеристика максимальная и равна 2.

Поскольку легко себе представить поверхность как сферу с некоторым числом топологических ручек (ручки похожи на оконные, шариковые не годятся), то эйлерову характеристику удобно вычислять по формуле $2-2g$, где $g$– число ручек или, по-другому, род поверхности, хотя это определение не является строгим.

Неориентированную замкнутую поверхность представить себе сложнее, поскольку она не может быть смоделирована в пространстве без самопересечений. Самая простая неориентированная поверхность называется лентой Мебиуса. Впрочем, эта поверхность имеет границу т.е. не является поверхностью без края. Неориентируемая эта поверхность потому, что если выбрать на ней произвольную точку $x$ и вектор $\xi_x$, приложенный в этой точке по нормали к поверхности, означающий попросту выбор стороны поверхности в пространстве (или ориентацию), то при однократном обходе ленты Мебиуса по центральной линии, после того как мы вернемся в исходную точку $x$, вектор $\xi_x$ сменится на обратный $-\xi$ или, по-другому, сторона поверхности в пространстве (ориентация) поменяется.

Чтобы научится представлять себе любую неориентируемую поверхность, достаточно научится представлять себе одну из них, которая называется проективная плоскость. Рассмотрим круг единичного радиуса и условимся, что его граница отождествлена сама с собой по правилу центральной симметрии. Тем самым, если мы находимся на граничной точке поверхности диска $x$, то одновременно и в ее антиподе $S(x)$. Соседними точками для нас будут служить точки внутри двух маленьких полукругов с центрами в $x$ и $S(x)$, которые лежат кроме того внутри нашего круга.

Можно убедится в том, что антиподальная пара точек граничного полукруга, взятая вместе со своей малой окрестностью на проективной плоскости, устроена точно так же как произвольная точка, выбранная внутри круга. Для этого удобно перейти к другой модели проективной плоскости в которой все точки одинаковые. Рассмотрим сферу (1), и скажем,что пара антиподальных точек $x$, $T(x)$ на сфере, где $T$ – центральная симметрия в пространстве с центром в начале координат, которая переводит сферу с себя, задает одну точку на проективной поскости.

Связь с предыдущим определением следующая. Рассмотрим полусферу (1), заданную пересечением сферы с полупространством $z \geq 0$. Каждую пару антиподальных точек, одна из которых лежит внутри выбранной полусферы, можно пометить одной точкой на верхней полусфере, забыв нижний антипод. Верхнюю полусферу можно спроектировать на единичный круг вдоль $z$-координаты, при этом на граница полусферы перейдет в границу полукруга. Правило отождествления антиподов на сфере останется актуальным лишь для точек на окружности, и это правило задается теперь центральной симметрией в плоскости.

Представить себе проективную плоскость, тем самым, довольно трудно. Авторам удалось убедить себя в том, что они ее себе представляют. Используя одну лишь проективную плоскость, можно научится представлять себе любую неориентированную поверхность при помощи операции связного суммирования. Пусть $P_1$, $P_2$ – два экземпляра проективной плоскости. Выберем на каждом экземпляре по точке $x_1$, $x_2$. Вырежем два маленьких диска с центрами в этих точках на каждом экземпляре проективной плоскости. Границы вырезанных дисков на проективной плоскости обозначим через $S_1$, $S_2$. Теперь рассмотрим маленький цилиндр (топологическую ручку). Заметим, что окрестность цилиндра представляет собой объединение двух окружностей. Приклеим одну из них к окружности $S_1$, а другую к $S_2$. Для этого следует зафиксировать угловые координаты на $S_1$ и $S_2$, а также на круговой образующей (и тем самым, на граничных окружностях цилиндра). Подклейку окружностей следует производить в соответствии с выбранными координатами, что и определяет операцию связного суммирования двух проективных плоскостей. Операция связного суммирования является абстрактной операцией, но удобно представлять ее как перестройку двух погруженных поверхностей.

Неожиданным является то, что свяную сумму двух проективных плоскостей представить себе проще, чем одну проективную плоскость. Это потому, что образ этой связной суммы в евклидовом пространстве устроен достаточно просто. Новая поверхность имеет собственное название: бутылка Клейна. Мы приводим две разных погруженных поверхности, которые параметризуются одной и той же бутылкой Клейна. Как погруженные поверхности они обладают совершенно различными свойствами, в частности не совмещаются регулярной гомотопией, т.е. непрерывной деформацией в классе погруженных поверхностей без вырождений касательных плоскостей.

Обе поверхности можно представлять себе в виде проволочных моделей так, что линия самопересечения моделируется как пересечение далеких участков поверхности в пространстве. Вдоль линии самопересечния два листа проволочной модели проходят друг сквозь друга, поскольку частая проволочная сеть, моделирующая малый участок поверхности определяет пересечение с другим участком проволочной поверхности если представлять себе этот участок как воображаемый предельный (двумерный) после бесконечного измельченния узлов модели, в то время как реальная модель расположена в пространстве без самопересечений.

Первая модель часто встречается в литературе. Она представляет собой узкий длинный цилиндр граничные окружности которого склеены между собой против их согласованной ориентации на цилиндре. Такую подклейку невозможно произвести без самопересечения цилиндра. Поэтому на поверхности появляется замкнутая линия самопересечения, которая на одном листе поверхности (представляющим собой замкнутую полосу) в окрестности линии самопересечения доставляет образующую исходного цилиндра, а на другом расположена в круговой окрестности малого диаметра.

При построении второй модели следует взять в плоскости кривую лимнискаты, имеющую форму "восьмерки".

Затем в пространтве выбирается стандартная окружность радиуса 1, лежащая в плоскости, и в каждое трансверсальное сечение этой окружности вписывается диск радиуса 1/2, так что диски попарно не пересекаются. Внутрь каждого диска вписывается лимниската так, что при однократном обходе вдоль окружности кривая совмещается сама с собой в результате поворота на угол $\pi$. При таком совмещении ориентация на лименискате не сохраняется. Исходная окружность служит теперь кривой самопересечения поверхности, она составлена из точек самопересечений всех трансверсальных сечений.

Двигаясь дальше можно построить связную сумму произвольного числа проективных плоскостей. Оказывается, что при этом получаются все неориентируемые поверхности. Каждая такая поверхность классифицируется эйлеровой характеристикой, принимающей целые значения, не превышающие 1. У проективной плоскости эйлерова характеристика равна 1, а при связном суммировании любой поверхности с проективной плоскостью эйлерова хаактеристика падает на 1. Можно выразить эйлерову характристику числом проективных плоскостей, которые требуются для построения данной поверхности при связном суммировании. Это определение не является строгим и имеет недостаток: по данной погруженной поверхности вычислить ее эйлерову характеристику будет весьма затруднительно. Кроме того, не вполне очевидно, что одна и та же поверхность не может быть представлена при связном суммировании $k_1$ проекривных плоскостей и одновременно $k_2$ проективных плоскостей, где $k_1 \neq k_2$. Согласно правилу построения неориентированных поверхностей, связная сумма $k$ экземпляров проективной плоскости с ориентируемой поверхностью эйлеровой характеристики $-2p - 2$ представима в виде связной суммы $k + 2p$ экземпляров проективной плоскости, что неочевидно.

Итак, следует различать абстрактную поверхность, или поверхность как такую, и погруженную (в частном случае – вложенную) поверхность. Второму понятию мы собираемся уделить основное внимание. Произвольная погруженная поверхность допускает отображение параметризации, поскольку по определению является образом абстрактной поверхности при некотором отображении. Нас будут интересовать не только погруженные (регулярные), но и поверхности с особенностями или даже поверхности с тем или иным классом особенностей, которые будут описаны в рамках той или иной конструкции. Понятию ориентации абстрактной поверхности соответствует понятие стороны у погруженной поверхности.

Одним из важнейших первичных понятий в современной топологии является понятие узла или зацепления. Понятие поверхности или, более конкретно, погруженной поверхности, также важно, поскольку переформулировать законы топологии в рамках теории узлов представляется затруднительным. Трехмерные многообразия изучены на современном этапе значительно хуже и не являются пока фундаментальными. Они изучаются при помощи функций, дифференциальных форм, фундаментальной группы, группы автоморфизмов гиперболического пространства, гладких циклов, иначе говоря, опосредовано. С другой стороны, мир поверхностей столь же разнообазен как и мир узлов.

Самой первой модельной задачей для поверхностей является задача классификации погруженных поверхностей с точностью до кобордизма. Коротко говоря, кобордизм – это деформация в пространстве погруженных поверхностей (т.е. регулярная деформация), при котором разрешается модифицировать погруженную поверхность, перестраивая ее вдоль маленькой стандартной топологической ручки. Отношение кобордантности является отношением эквивалентности на пространстве всех погруженных поверхностей. Задача классификации погруженных поверхностей с точность до погруженного кобордизма не является столь сложной как задача классификации зацеплений с точностью до изотопии. Важность этой задачи обусловлена в первую очередь тем, что при ее решении смыкаются три различных области математики: теория гомотопий классифицирущих пространств, теория квадратичных форм над кольцами и теория особенностей гладких отображений. Эта связь ранее никем систематически не изучалась. Расскажем о проявлении каждой из этих теорий и наметим дальнейшие перспективы.

Классификация погруженных поверхностей с точностью до кобордизма (и аналог этой задачи для многообразий в старших разменостях) проводится при помощи построения классифицирующего пространства, соответствующего данной задаче (пространства получаются разными, если мы рассматриваем проблему классификации ориентированных и неориентируемых поверхностей) и вычисления его гомотопических групп. Может показаться, что классифицирующее пространство – объект неоправдано сложный и что вычисление гомотопических групп или даже групп гомологий классифицирующего пространства сложнее, чем решить ту или иную задачу классификации прямыми геометрическими методами. Это заблуждение. Следует иметь ввиду аналогичные задачи классификации в старших размерностях. Классифицирующие пространства играют в современной топологии первостепенную роль.

Для классификации ориентированных (или по-другому двусторонних) вложенных поверхностей (и даже многообразий произвольной размерности) классифицирующее пространство является окружностью $S^1$. Способ состоит в следующем.

Произвольную вложенную (двустороoню) поверхность $M$ в сфере $S^3$ можно определить как прообраз точки $pt \in S^1$ при некотором отображении $F : S^3 \to S^1$, $M = F^{-1}(M) \subset S^3$, регулярном вдоль $pt$. Гомотопиям (регулярным вдоль $pt$) будут соответствовать кобордизм нашей поверхности в классе вложенных поверхностей. Переход от вложенной к погруженной поверхности осуществляется в результате стабилизации классифицирующего пространства в смысле теории гомтопий. Стабилизация представляет собой функтор $Q : X \to QX$, переводящий произвольное пространство $X$ в пространство $QX = lim_{n\to\infty}\Omega^n\Sigma^n X$, где $\Sigma^n(X)$ – $n$-кратная надстройка, $\Omega^n(Y,pt)$– пространство отображений стандартной $n$-мерной сферы в пространство $Y$, сохраняющих отмеченные точки. Пространство $Q(X)$ не является конечным клеточным пространством. Часто рассматривают не само пространство $Q(X)$, а его конечную модель, которое ему слабо гомотопически эквивалентна.

Теперь взяв $X = S^1$ (или $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, если мы изучаем классификацию неориентируемых поверхностей) изучают гомотопические группы пространства $Q(S^1)$ (или $Q(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$). Оказывается, что произвольному отображению $S^3 \to Q(S^1)$ соответствует погруженная двусторонняя поверхность, а при гомотопии отображения сферы, сохраняющей отмеченные точки (такие гомотопии называются пунктированными) погруженная поверхность меняется на кобордантную. Таким образом, задача классификации погруженных подмногообразий с точностью до кобордизма превращается в задачу вычисления гомотопических групп соответствующего классифицирующего пространства.

Применение классифицирующих пространств в задаче классификации двусторонних погруженных подмногообразий с точностью до кобордизма особенно красиво. Гомотопические группы $\pi_m(QS^1)$ в этом случае являются ничем иным как стабильными гомотопическими группами сфер $\Pi_m = \pi_{m+k}(S^k)$, $k > n+1$. Эту теорему (Уэлс) мы докажем исходя из классификационных теорем Смейла-Хирша для погружений многообразий. Кратко говоря, наш подход заключается в следующем.

Обозначим через $Imm^{fr}(M^m; \mathbb{R}^{m+k})$ – множество классов эквивалентности по отношению регулярной гомотопии оснащенных погружений стабильно-параллелизуемого многообразия $M^m$ в евклидово пространство с коразмерностью $k$. Под оснащенным погружением понимают погружение $f$, трубчатая окрестность $U_f$ которого (погруженная) представлена в виде прямого произведения $U_f = M^m \times D^k$ многообразия на $k$-мерный диск.

Множество $Imm^{fr}(M^m; \mathbb{R}^{m+k})$ естественно вкладывается в пространство $Imm^{fr}(M^m; \mathbb{R}^{m+k+1})$ посредством отображения $\Sigma_{k,k+1}$, индуцированого вложением $\mathbb{R}^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+k+1}$. Согласно теории погружений, отображение $\Sigma_{k,k+1}$, при $k > 1$ индуцирует взаимно-однозначное соответствие на множестве компонент связности. При $k = 1$ это верно лишь в прежположении четного $m$. При нечетном $m$ это верно, если погруженные подмногоообразия разрешается "стабилизировать", т.е. добавлять к ним связную сумму с некоторым количеством стандартно вложенных сфер ориентированных тем или иным способом. Заметим, что при $k > m+1$ погружения и их регулярные гомотопии можно предполагать без самопересечений, т.е. вложениями.

Тем самым, если мы интересуемся классами кобордизма двусторонних погруженных $m$-мерных подмногообразий в коразмерности 1, то нам достаточно вычислить соответствующие группы оснащенных вложений в коразмерности $k > m+1$. Последние в силу принципа Понтрягина в точности совпадают с гомотопической группой $\pi_{m+k}(S^k)$, которая не зависит от $k$. При нашем подходе стабилизация в группе кобордизмов погружений и в гомотопических группах происходит раздельно, а равенство устанавливается при достаточно большом $k$.

Вычисление гомотопической группы $\pi_3(Q(S^1))$ и $\pi_3(Q(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty))$ является уже чисто алгебраической задачей. Эта задача решается методом спектральных последовательностей. Мы ограничимся самыми простыми методами работы со спектральными последовательностями, обобщения вычислений в старших размерностях предполагают более совершенные алгебраические методы.

В Главе 2 мы рассмотрим задачу классификации поверхностей с точки зрения задачи классфикаци квадратичных форм. Под кососимметрической билинейной формой над целыми числами понимают функцию от двух аргументов $< x, y >$ из конечномерного свободного модуля $P$ над $\mathbb{Z}$ со значениями в $\mathbb{Z}$. Такая функция удовлетворяет свойству линейности по каждому аргументу, т.е.

$$< ax_1 + bx_2, y >= a < x_1, y > +b < x_2, y >$$

и свойству антисимметричности

$$< x, y >= - < y, x > .$$

Свойство невырожденности означает, что для произвольного ненулевого $x \in P$ найдется вектор $y$ для которого $< x, y >$ не обращается в нуль. В нашем случае значение формы приводится по модулю 2 и знак в формуле косой симметрии можно не учитывать.

Билинейные кососимметрические формы возникают как на группе гомологий $H = H_1(M; \mathbb{Z})$ произвольной ориентированной поверхности если воспользоваться операцией пересечения классов гомологий в смысле Пуанкаре. В силу условия косой симметрии для любого цикла $x \in H$ значение $< x, x >$ равно нулю. Если поверхность $M$ неориентирована, то модуль $H$ перестает быть свободным над $\mathbb{Z}$. Поэтому принято рассматривать квадратичные формы на $H = H_1(M; \mathbb{Z}/2)$ (переобозначения не вводятся), причем значения формы определены лишь по модулю 2, поскольку точкам из множества пересечения двух циклов на поверхности не удается приписать алгебраического знака.

Оказывается, что по произвольной погруженной поверхности можно определить дополнительную алгебраическую структуру, связанную с билинейной формой на модуле $H$. Эта структура называется квадратичной формой. Под квадратичной формой понимают функцию $q$, определенную на $H$, которая принимает значения $\{0; 2\}$, если форма четна, т.е. если поверхность $M$ – ориентирована и $\{0, 1, 2, 3\}$, если поверхность неориентирована. Функция $q$ должна удовлетворять уравнению

$$q(x + y) + q(x) + q(y) =< x, y > \qquad (mod 2),$$

которое показывает, что четность значения билинейной формы для произвольной пары циклов может быть вычислена по значениям квадратичной формы для соответствующей тройки циклов. С другой стороны, это же равенство показывает, что функция $q$ не является гомоморфизмом.

Среди квадратичных форм выделяют стандартные гиперболические формы. Каждая гиперболическая форма $h$ определена на двумерном модуле с базисом $(e; f)$ по формулам $h(e) = h(f) = 0$, $h(e + f) = 1$. Полугруппа квадратичных форм относительно операции прямого суммирования становится абелевой группой если ввести следующее отношение эквивалентности. Говорят, что две формы $q_1$, $q_2$ являются эквивалентными, если они становятся изоморфными после прибавления соответствующего числа гиперболических форм,

$$q_1 \oplus k_1 h = q_2 \oplus k_2 h.$$

Классы эквивалентности квадратичных форм относительно операции прямого суммирования образуют группу, которая называется группой Витта квадратичных $\mathbb{Z}/2$. Для квадратичных $\mathbb{Z}/4$-форм группа Витта также определена, при этом следует учитывать, что для билинейной формы, ассоциированной с $\mathbb{Z}/4$-квадратичной формой, значение $< x, x >$ может принимать произвольные значения $(mod 2)$. Используя элементарные методы, мы вычислим группы Витта и покажем, что эти группы естественно изоморфны группам кобордизма двусторонних погруженных поверхностей (или односторонних в случае форм над $\mathbb{Z}/4$) в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Предложенный подход к классификации погружений, восходящий к Л.Зибенману, моделирует решение основной проблемы дифференциальной топологии: классификации гладких структур на замкнутом топологическом многообразии высокой размерности. Аналогом гладкой структуры является класс регулярной гомотопии погруженной поверхности. Классы кобордизма полностью классифицируются группами Витта, которые соответствуют группам Уолла препятствий к перестройкам нормальных отображений.

Важная открытая проблема в современной топологии состоит в классификации 2-зацеплений в 4-пространстве. Мы рассмотрим одну из простейших постановок этой задачи в которой соответствующим образом определенная квадратичная форма на проекции поверхности из 4-мерного в 3-мерное пространство отвечает за расположение самой поверхности в 4-пространстве. Возникает интересное соотношение типа четности, которое можно интерпретировать в рамках теоремы Рохлина о сигнатуре 4-многообразия.

В главе 3 мы рассматриваем третий подход к задаче классификации погруженны поверхностей, связанный с теорией Васильева. Исходная точка зрения такова. Погруженная поверхность заменяется ее видимым контуром, который представляет погруженную кривую на плоскости, с конечным числом критических точек специального вида, которые называются особенностями $I$-структуры. При регулярном кобордизме множество критических точек $I$-структуры испытывает метаморфозы. Пространство всевозможных метаморфоз описывается некоторым списком локальных мультиособенностей $I$-структуры. Этот список мультиособенностей определяет дискриминант в пространстве $I$-структур.

Понятие $I$-структуры обобщается на случай произвольной поверхности с самопересечениями и с особенностями общего положения и на однопараметрические деформации общего положения этих особых поверхностей. При этом класс регулярного кобордизма погруженной поверхности представляется инвариантом Васильева первого порядка в пространстве $I$-структур всех поверхностей, включая особые.

Связь погруженных поверхностей с теорией особенностей становится более понятной при рассмотрении поверхности как графика критических точек двупараметрического семейства функций или как лежандров фронт. Простейшей теоремой, связывающей теорию погружений и вложений с математическим анализом является теорема В.И.Арнольда о фундаментальной группе пространства функций на прямой со стандартными граничными условиями в окрестности бесконечности и без особенностей типа $A_3$ и более сложных. Фундаментальная группа этого функционального пространства естественно изоморфна группе кобордизма плоских кривых без горизонтальных перегибов, которая легко вычисляется элементарными методами. Исследование поверхностей критических значений многопараметрических семейств функций (диаграмм Серфа) на неодносвязном многообразии высокой размерности приводит к нерешенным задачам в топологии многообразий.

Для работы с картами главного магнитного поля Земли удобно отказаться от линий уровня графиков сферических функций и воспользоваться лежандровыми графиками, рассматривая их перестройки в однопараметрических семействах. Сферическая функция, представленная в виде линейной комбинации конечного числа элементарных сферических функций (мультиполей) соответствует лежандрову подмногообразию графика, расположенное в пространстве струй с контактной структурой. Фронт лежандровой проекции представляет поверхность с самопересечениями в трехмерном пространстве, причем изменению функции соответствует перестройка фронта. В частности, инверсии магнитного поля, т.е. его переполюсовке, будет соответствовать деформация типа "выворачивания"лежандрова графика "наизнанку", которая из энергетических соображений будет представлятся путем в пространстве старших магнитных мультиполей с постоянной скалярной нормой. Итак, особенности фронта лежандрова графика и его перестройки связаны с энергетическим спектром сферической функции и являются наиболее информативной визуализацией скалярного потенциала магнитного поля.

В заключении отметим, что изложенный в лекциях материал предполагает присутствие дружелюбного талантливого читателя, который сможет развивать его. "Вглубь" в смысле продвижения в направлении старших размерностей, заточенных в подземных дворцах. При таком развитии топология подчиняет себе алгебру, форма служит "архимедовым рычагом" для открытия новых законов мира натуральных чисел. "Ввысь" в смысле обнаружения все более мелкомасштабных структур, которые могут показаться хаотическими с недостаточной высоты рассмотрения. Здесь алгебра берет верх над геометрией, заставляет форму структурироваться в соответствии с законами натурального ряда.

## 1.1 Погружения поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и основная проблема их классификации с точностью до регулярной гомотопии и кобордизма

Погружением замкнутого многообразия $M^m$ в многообразие $N^n$ называется гладкое отображение $f : M \to N$ такое, что для каждой точки $m \in M$ индуцированное отображение касательных пространств $Df : T(M) \to T(N)$ является морфизмом (в частности, $m \leq n$). Нас будет, в основном, интересовать случай $m = 2$, $N = \mathbb{R}^3$. В этом случае образ погружения называется погруженной поверхностью, отображение $f$ называется ее параметризацией, а многообразие $M$ называется параметризующей поверхностью. Для фиксированной погруженной поверхности $A = f(M)$ множество ее параметризаций определяется группой автодиффеоморфизмов параметризующей поверхности.

Погруженные поверхности делятся на двусторонние и односторонние. Двусторонняя поверхность снабжена векторным полем $\xi(m) \in T_{f(m)}(\mathbb{R}^3)$, $m \in M$, так, что $\xi(m) \perp T_{f(m)}$. Вектор $\xi(m)$ называется нормалью к поверхности. Для любой двусторонней поверхности с выбранным полем нормалей параметризующая поверхность является ориентированной и ориентация на $M$ согласуется с выбором векторного поля нормалей по правилу правого буравчика. При этом поле нормалей называется коориентацией поверхности. Напротив, если поверхность $B = g(M)$ является односторонней (т.е. невозможно построить поле нормалей к ней), то $M$ неориентирована.

Обозначим пространство всех погружений поверхности $M$ в $\mathbb{R}^3$ через $Imm(M;\mathbb{R}^3)$. На пространстве погружений вводится следующее отношение эквивалентности. Скажем, что два погружения $f_0 : M \looparrowright \mathbb{R}^3$ и $f_1 : M \looparrowright \mathbb{R}^3$ регулярно гомотопны, если существует регулярная гомотопия $F(t) : M \looparrowright \mathbb{R}^3$, $t \in [0;1]$, т.е. такая гомотопия, что $F(t)$ является погружением для всех значений параметра $t$ и $F(0) = f_0$, $F(1) = f_1$.

Пусть теперь $IMM$ пространство всех поруженных поверхностей без выбора параметризаций. Различают пространства $IMM^{sf}$ и $IMM^{fr}$. В первом случае допускаются односторонние поверхности ($sf$=skewframing), во втором рассматриваются лишь двусторонние ($fr$=framing), причем ориентация (или сторона) поверхности фиксирована. Иногда мы будем писать $IMM^{sf}(2;1)$ и $IMM^{fr}(2;1)$, указывая лишний раз на размерность и коразмерность погруженной поверхности. Такое обозначение допускает обобщения для погружений многообразий произвольных размерности и коразмерности. В пространствах $IMM^{sf}$ и $IMM^{fr}$ мы введем отношение эквивалентности, называемое отношением кобордантности.

Пусть $A_0$ и $A_1$ две погруженных поверхности из $IMM^{sf}$. Скажем, что поверхности кобордантны, если найдутся их параметризации $f_i : M_i \looparrowright \mathbb{R}^3$, $i = 0,1$, многообразие $W^3$ с границей $\partial W = M_0 \cup M_1$ и такое погружение $F : (W^3, \partial W^3 = M_0 \cup M_1) \looparrowright \mathbb{R}^3 \times [0;1], \mathbb{R}^3 \times \{0\} \cup \mathbb{R}^3 \times \{1\}$, что выполнены условия $F|M_0 = f_0 : M_0 \looparrowright \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, $F|M_1 \looparrowright \mathbb{R}^3 \times \{1\}$. Погружения из пространства $IMM^{sf}$, рассматриваемые с точностью до отношения кобордантности, образуют конечное множество, которое обозначается через $Imm^{fr}$. Множество $Imm^{fr}$ наделено структурой абелевой группы, относительно операции дизъюнктного объединения погружений. Единией в этой группе служит погружение пустой поверхности, а операция взятия обратного элемента задается отражением погруженной поверхности в гиперплоскости.

Теперь обратимся к случаю двусторонних поверхностей. В этом случае говорят, что поверхности $A_0$ и $A_1$ кобордантны как ориентированные поверхности, если многообразие $W$ само является ориентированным, причем ориентация $W$ на крае $M_0$ совпадает с ориентацией на $M_0$, а ориентация на крае $M_1$ противоположна ориентации, выбранной на этой поверхности. Правило согласования ориентаций приобретает наглядный смысл, если мы перейдем к коориентациям. Если, к примеру, кобордизм представляет собой регуярную гомотопию, то стороны при регулярной гомотопии у поверхностей $M_0$ и $M_1$ выбраны согласовано. Пространство $IMM^{fr}$ факторизуется по введенному отношению кобордизма в конечное множество, обозначаемое через $Imm^{fr}$.

Теперь изучим кобордизм двух погруженных поверхностей как регулярную гомотопию с особенностями. Рассмотрим случай односторонних поверхностей. Кобордизм $F$ двух погруженных поверхностей можно представлять себе как последовательность регулярных гомотопий и дискретных преобразований, называемых перестройками погруженной поверхности. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ – упорядоченная последовательность из $n$ точек на отрезке $[0;1]$ $(t_n = 1)$. Рассматривается последовательность регулярных гомотопий $G_i(t), t \in [t_{i-1}; t_i], 1 \leq i \leq n$ и последовательность перестроек $\Xi_i$, переводящих погружение $G_i(t_i - \varepsilon)$ в погружение $G_{i+1}(t_i + \varepsilon)$, где $\varepsilon$ положительное число, много меньшее длины минимального отрезка $[t_i; t_{i+1}]$. Каждое преобразование $\Xi_i$ представляет собой перестройку погруженной поверхности по ручке индекса $0, 1, 2$ или $3$. Каждая такая перестройка соответствует критической точке проекции $p : (W, \partial W) \to [0;1]$. Каждая критическая точка соответствует ровно одному критическому моменту времени $t_i$ при котором топология параметризующей поверхности меняется. Индекс ручки при перестройке соответствует сигнатуре критической точки функции $p$. Перестройка по ручкам индекса 0 и 3 представляет собой рождение или исчезновение маленькой сферы в окрестности выделенной точки в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рождение сферы соответствует минимальному значению $\pi$.

Перестройку по ручке индекса 1 можно описать следующим образом. Пусть $a \in V_a \subset U_a \subset \mathbb{R}^3$ пара концентрических шаров радиусов $\varepsilon$ и $2\varepsilon$, содержащих точку $a$. Пусть $\psi(x, y, z)$ – $C^\infty$- функция равная 1 внутри $V_a$ и 0 вне $U_a$ (вместе со всеми частными производными). Рассмотрим семейство гиперповерхностей $S_\delta$ внутри окрестности $U_a$, зависящих от параметра $\delta$ по по формуле

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - (z - z_a)^2 = \delta\psi(x, y, z),$$

где $\delta \in ]-\varepsilon; \varepsilon[$. Предположим, что погруженная поверхность $F(t_i - \delta_0)(M_{t_i - \delta_0})$ внутри шара $U_a$ совпадает с поверхностью $S_{-\varepsilon}$. Перестройка $\Xi_i$ состоит в том, что участок поверхности внутри $U_a$ заменяется на поверхность $S_\varepsilon$, и не меняется вне $U_a$.

Параметризуюшая поверхность $M_{t_i+\varepsilon}$ получается из поверхности $M_{t_i-\varepsilon}$ перестройкой по ручке индекса 1. Из $M_{t-i-\varepsilon}$ вырезаются два маленьких непересекающихся диска $D_0 \cup D_1$ и затем вклеивается цилиндр $\partial D_0 \times [-1;1]$ по каноническому диффеоморфизму границы.

Перестройка по ручке индекса 2 получается из описанной при обращении знака параметра $\delta$. Сама перестройка заменяется на обратную.

Рассмотрим ортогональную проекцию погруженной поверхности $f(M)$ на плоскость $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ или, эквивалентно, рассмотрим композицию $f \circ \pi : M^2 \to \mathbb{R}^2$, где $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Критические значения проекции $\pi$ представляют кривую $\Sigma^1$ точек складки на которой имеется конечное множество $\Sigma^{1,1}$ особых точек типа сборки. Проекция $\pi(\Sigma^1)$ кривой на плоскость является погруженой и имеет особенности в точках $\pi(\Sigma^{1,1})$.

Кривая самопересечения $\Delta_2(f)$ представляет собой погруженную в пространстве регулярную кривую. Эта кривая имеет, вообще говоря, конечное множество особых точек $\Delta_3(f)$ троекратного самопересечения, это множество является также множеством точек троекратного самопересечения поверхности. Проекция $\pi(\Delta_2(f))$ этой кривой на плоскость также представляет собой погруженную кривую. Совместные особенности кривых $\pi\Delta_2(f)$ и $\pi\Sigma^1$ на плоскости называются $I$-структурой ($I$=intersection).

Для того, чтобы представить себе погруженую поверхность и $I$-структуру этой погруженой поверхности поверхности применяют метод сечений.

## 1.2 Представление погруженой поверхности семейством сечений

Пусть $f(M)$ –погруженая поверхность. Гиперплоскости сечений выбираются параллельными выделенной гиперплоскости $\mathbb{R}^2(x,y) \subset \mathbb{R}^3$. Условимся, что при возрастании параметра гиперплоскость сечения приближается к наблюдателю. Тем самым, понятия "ниже"и "выше"приобретают вполне определенный смысл. Мы будем отождествлять все гиперплоскости сечений с гиперплоскостью $\mathbb{R}^2(x,y)$ посредством ортогональной проекции. Таким образом, кривые гиперплоскостных сечений поверхности $f(M)$, лежащие в этих плоскостях, можно считать "движущимися"при изменении значения параметра гиперплоскости сечения. Это соглашение позволяет рассматривать каждую кривую гиперсечения вместе со своим полем скоростей, определяющим перемещение кривой по гиперплоскости сечения при бесконечно малом изменении параметра этой гиперплоскости.

Те точки, вектора скорости в которых равны нулю, являются точками пересечения кривых складки с гиперплоскостями сечения. При некоторых значениях параметра две соседние точки складки могут сливаться в одну и исчезать (рождаться). Это означает, что в указанной точке кривая $\Sigma^1(f)$ имеет максимум (минимум) проекции на ось $\mathbb{R}(z)$ параметров гиперсечений. В некоторые моменты времени точки складки могут изменять направление движения вдоль кривой гиперсечения на противоположное. Это характеризует точку сборки проекции. Возможны два варианта расположения точек сборки "правое"и "левое". Эти случаи изображены на рис. 2a,b. Прямыми стрелками на этих рисунках помечены скорости движения точек кривой гиперсечения. Точки складки помечены крестиками, изогнутые стрелки характеризуют траектории движения точек складки вдоль участков кривой сечения.

На рис. 3а,б отмечены те же точки сборки вместе с участками самой поверхности. Если линии складки обходить в плоскости проекции с положительной стороны, (т.е. так, что сама поверхность проектируется слева по отношению к направлению обхода) то в точках сборки 3а мы будем двигаться вниз вдоль направления оси проекции, а в точке 3б вверх.

Чтобы проследить за проекцией $\pi(\Delta_2)$ линии самопересечения поверхности $f(M)$ станем последовательно изображать траектории перемещающихся точек при изменении параметра гиперплоскости. Рассмотрим для примера семейство гиперплоскостей участка поверхности, содержащего две ветви кривой складки, расположенные в пространстве близко друг к другу (см. рис. 4). Ветвь кривой $\Sigma^1$ лежащая на листе поверхности $I$ расположена ниже ветви на участке $II$. Порядок расположения этих ветвей по высоте определяет направление поворота траектории точки самопересечения кривой сечения. При другом порядке ветвей направление поворота изменится на противоположное. На рис. 5 изображены листы поверхности в пространстве, соответствующие семейству гиперсечений с рис. 4. Изучим семейство сечений поверхности Боя, представленные на рис. 6. Видимый контур поверхности Боя представлен на рис.7. Проекция $\pi(\Sigma^1)$ линии точек складки, образующая этот контур, состоит из двух замкнутых компонент. Точек самопересечения кривая $\pi(\Sigma^1)$ не имеет. $I$-структура поверхности Боя, построенная по данному семейству сечений, изображена на Рис.8.

### Задачи

1. На рисунке 9 изображено однопараметрическое семейство сечений сферы Морена. Восстановить по представленному семейству сечений $I$-структуру поверхности.

2. На рис. 10 изображен видимый контур сферы Милнора, лежащий в плоскости. Видимый контур ограничивает два различных диска. Эти диски представляют верхнюю и нижнюю полусферы на погруженной сфере Милнора и расположены в верхнем и нижнем полупространстве соответственно. Восстановить семейство сечений этой погруженой сферы а также $I$-структуру поверхности.

3. На рис. 11 изображен видимый контур тора Константинова, лежащий в плоскости. Внутреняя кривая видимого контура, имеющая точки самопересечения, представляет границу тора с вырезанным диском и расположена в верхнем полупространстве. Далее цилиндрическое кольцо, расположенное в нижней полуплоскости, связывает две компоненты видимого контура между собой. Наконец, диск, ограниченный внешней окружностью контура, целиком располагается в верхнем полупространстве. Восстановить семейство сечений этой погруженой сферы и также $I$-структуру.

4. На рис. 12 изображено однопараметрическое семейство сечений, определяющих тор Понтрягина. Восстановить $I$-структуру поверхности.

5. Восстановить $I$-структуру погруженной сферы, параметризующей регулярную окрестность поверхности Боя малого радиуса.

# 2 Элементы дифференциальной топологии и теории гомотопий

## 2.1 Определение групп кобордизма $Imm^{fr}(n,1)$, $Imm^{sf}(n,1)$; редукция вычисления этих групп к гомотопической задаче

Пусть $\varphi : M^m \to \mathbb{R}^{m+k}$- гладкое погружение, причем многообразие $M^m$ - ориентируемо. На пространстве погружений $m$-мерных многообразий введем отношение кобордантности. Скажем, что два погружения $\varphi_0$, $\varphi_1$ связаны кобордизмом, $\varphi_0 \sim \varphi_1$, если существует многообразие $W^{m+1}$ с границей $\partial W = M_1^m \cup (-M_0^m)$ и погружение $\psi : (W^{m+1}, \partial W = M_0^m \cup M_1^m) \to \mathbb{R}^{m+1} \times [0;1]$ такое, что выполнены граничные условия $\varphi_i = \psi | M_i^m : M_i^m \to \mathbb{R}^{m+1} \times \{i\}$, $i = 0,1$. Множество классов кобордизмов погруженных ориентированных многообразий образует абелеву группу относительно операции дизъюнктного объединения погружений. Эту группу обозначим через $Imm^{so}(m,k)$.

Теперь определим группы кобордизмов $Imm^{fr}(m,1)$, $Imm^{sf}(m,1)$ (мы дадим более общие определения групп $Imm^{fr}(m,k)$, $Imm^{fr,sf}(m,k)$, которые, как оказывается, не зависят от значения параметра $k$).

Группа $Imm^{fr}(m,k)$ порождена парами $(\varphi,\Xi)$, где $\varphi : M^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ – погружение, представляющее элемент из $Imm^{fr}(m,k)$, $\Xi$– оснащение нормального расслоения погружения $\varphi$, т.е. изоморфизм нормального расслоения $\nu(\varphi)$ и тривиального $k$-расслоения $k\varepsilon$ над многообразием $N$. При этом требуется, чтобы погружение $\psi$, определяющее кобордизм двух погружений $\varphi_i$, $i = 0,1$ также было оснащенным, согласованно с заданным оснащением границы.

По аналогии с группами $Imm^{fr}(m,k)$ определены группы $Imm^{fr,sf}(m,k)$. Эта группа порождена парами $(\psi,\Xi)$, где $\psi : M^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ – погружение, вообще говоря, неориентированного многообразия, а оснащение $\Xi$ понимается в смысле стабилизации одномерного скошенного оснащения, т.е. требуется фиксировать изоморфизм $\nu(\varphi) = \kappa \oplus (k-1)\varepsilon$, где $\kappa$ – ориентирующее одномерное расслоение над $M$. Определение кобордантности погружений дается аналогично, с соответствующими условиями согласования на $\partial W$. По определению $Imm^{fr;sf}(m,1) = Imm^{sf}(m,1)$.

Наряду с группами $Imm^{fr}(m,k)$, $Imm^{fr,sf}(m,k)$ мы будем рассматривать группы $Emb^{fr}(m,k)$, $Emb^{fr,sf}(m,k)$. Эти группы определяются совершенно аналогично, с той лишь разницей, что элементы этих групп представлены вложениями, кобордизмы также предполагаются вложенными. По соображениям размерности очевидно, что при $k > m+1$ имеются изоморфизмы $Imm^{fr}(m,k) = Emb^{fr}(m,k)$, $Imm^{fr,sf}(m,k) = Emb^{fr,sf}(m,k)$.

Нашей ближайшей задачей является построение гомотопических аналогов перечисленных выше групп кобордизмов. Сначала рассмотрим несколько примеров для случая $m = 0,1,2$.

Рассмотрим случай $m = 0$. Группа $Imm^{fr}(0,1)$ представлена конечным набором точек на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, причем каждая точка берется со знаком (ориентацией) $\pm 1$. Количество точек (с учетом их алгебраических знаков) определяет класс кобордизма и поэтому $Imm^{fr}(0,1) = \mathbb{Z}$. Если алгебраический знак точки не учитывать, то количество точек определено неотрицательным целым числом. При кобордизме пара точек может исчезнуть и четность этого числа определяет класс кобордизма. Поэтому $Imm^{sf}(0,1) = \mathbb{Z}/2$.

В случае $m = 1$ группа кобордизма $Imm^{fr}(1,1)$ представлена ориентированной кривой (вообще говоря, несвязной) погруженной в плоскость. Изоморфизм $Imm^{fr}(1,1) = \mathbb{Z}/2$ сопоставляет погруженной кривой общего положения четность числа ее точек самопересечения $(mod 2)$. Аналогично, $Imm^{sf}(1,1) = \mathbb{Z}/2$, причем изоморфизм устанавливается тем же способом.

В случае $m = 2$ имеются изоморфизмы $Imm^{fr}(2,1) = \mathbb{Z}/2$, $Imm^{sf}(2,1) = \mathbb{Z}/8$, которые мы докажем двумя неависимыми способами. Далее мы сможем интерпретировать результаы этих вычислений в терминах инварианта Васильева порядка 1. Естественный гомоморфизм $Imm^{fr}(2,1) \to Imm^{sf}(2,1)$ определяется мономорфизмом $\mathbb{Z}/2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/8$. Образующая группы $Imm^{sf}(2,1)$ представлена погружением Боя $\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}^3$, см. рис. 6-8. Образующая группы $Imm^{fr}(2,1)$ представлена погружением тора. Простейший способ задать образующую состоит в том, что мы рассматриваем стандартное вложение тора $f : T^2 \subset \mathbb{R}^3$, а затем рассматриваем 4-листное накрытие $p : T^2 \to T^2$, двукратное вдоль меридиана и параллели в стандартной системе координат. Погружение $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}^3$, определяющее образующую в $Imm^{fr}(2,1)$ определяется как композиция $\varphi = f \circ p$. Близкая модификация описанной конструкции представлена на рис. 12 семейством сечений и называется тором Понтрягина.

Другой возможный вариант выбора погружения, задающего образующую, которое, вдобавок, удовлетворяет дополнительным замечательным свойствам, при рассмотрении задачи распроектирования, задается тором Константинова.

Для формулировки основной теоремы, позволяющей вычислять группы $Imm^{fr}(n,1)$, $Imm^{sf}(n,1)$ методами алгебраической топологии, напомним ряд стандартных определений из теории гомотопий.

Пусть $X$- пунктированное клеточное пространство. Пространством $\Omega_n(X)$ $n$-петель на $X$ называется пространство пунктированных отображений $Map[S^n; X]$, снабженное компактно-открытой топологией. Стандартное включение $i_1 : X \subset \Sigma X$ пространства в свою (приведенную) надстройку позволяет построить соответствие $i_{*,1} : (S^1 \to X) \to (S^2 \to \Sigma X)$, которое индуцирует надстроечное отображение (включение) $I_{*,1} : \Omega_1(X) \to \Omega_2(\Sigma X)$. Определено локально конечное клеточное пространство $\Sigma^\infty = \lim_{\to} \Sigma^n X$, снабженное топологией прямого предела спектра надстроечных отображений $i_n : \Sigma^n X \to \Sigma^{n+1} X$ и определено включение $I_{*,n} : \Omega_n(\Sigma^n(X)) \to \Omega_{n+1}(\Sigma^{n+1}(X))$. Пространство $\Omega^\infty \Sigma^\infty(X)$ определено как прямой предел включений $i_{*,j}$, $1 \le j \le \infty$, $\Omega^\infty\Sigma^\infty(X) = \lim_{\to}(i_{*,n})$. Вводится специальное обозначение $\Omega^\infty\Sigma^\infty(X) = QX$.

**Теорема 2.1.** *Справедливы следующие изоморфизмы:*

$$Imm^{fr}(m,1) = \lim_{k\to\infty} \pi_{m+k}(S^k) = \pi_{m+1}(QS^1),$$

$$Imm^{sf}(m,1) = \lim_{k\to\infty} \pi_{m+k}(\Sigma^{k-1}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}) = \pi_{m+1}(Q\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}).$$

Вводится обозначение $\lim_{k\to\infty} \pi_{m+k}(S^k) = \Pi_m$. Доказательство Теоремы 1.4 основано на Теореме Хирша-Смейла о пространстве погружений, которую мы сейчас напомним.

Пусть $N$ – замкнутое многообразие, $X$ – произвольное и $dim(X) > dim(N)$. Обозначим через $Imm(N;X)$ пространство погружений многообразия $N$ в $X$, снабженное $C^1$ -топологией пространства гладких отображений. Рассмотрим пространство $Mon(TN;TX)$ состоящее из морфизмов касательных расслоений, которые являются мономорфизмами при ограничении на каждый слой. Обозначим через

$$D : Imm(N;X) \to Mon(TN;TX) \tag{2.1}$$

естественное отображение определенное взятием дифференциала погружения.

**Теорема 2.2 (Теорема Смейла-Хирша).** *Отображение (2.1) является слабой гомотопической эквивалентностью, т.е. является биекцией на множестве связных компонент и ограничение этого отображения на каждую компоненту связности индуцирует изоморфизм гомотопических групп всех размерностей.*

Нам потребуется относительный аналог этой теоремы. Пусть $V \subset N$ – открытое подмногообразие и существует погружение $\varphi : N \to X$. Обозначим через $Imm_{\varphi}(N;X)$ подпространство погружений, совпадающих с погружением $\varphi$ при ограничении на подмногообразие $X$. Аналогично, обозначим через $Mon_{D(\varphi)}(TN;TX)$ – подпространство погружений, ограничение которых на подмногообразие $V \subset M$ совпадает с $D(\varphi)$. Определено отображение

$$D_{\varphi} : Imm_{\varphi}(N;X) \to Mon_{D(\varphi)}(TN;TX). \tag{2.2}$$

**Теорема 2.3 (Теорема (относительный вариант Теоремы Смейла-Хирша)).** *Отображение (2.2) является слабой гомотопической эквивалентностью.*

Для доказательства Теоремы 1.1 нам потребуется определить формальные (неголономные) аналоги соответствующих групп кобордизмов. Переход к формальному аналогу в той или иной геометрической задаче, если эта формальная задача оказывается эквивалентной исходной, называется $h$-принципом. Для вычисления слабого гомотопического типа пространства погружений переход к формальной задаче носит название $h$-принципа Смейла-Хирша.

Пусть $hImm^{fr}(m,k)$ – множество, представленное парами $(M;\Xi)$, где $\Xi$– тривиализация расслоения $TM \oplus k\varepsilon$, (где $\varepsilon$– тривиальное расслоение над $M$) т.е. изоморфизм $\Xi : TM \oplus k\varepsilon \simeq (k+m)\varepsilon$.

Два элемента $(M_0;\Xi_0)$ и $(M_1;\Xi_1)$ из множества $hImm^{fr}(m,k)$ называются кобордантными, если существует $m+1$-мерное многообразие $W$ с краем, $\partial W = M_1 \cup (-M_0)$ и тривиализация $\Psi$ расслоения $TW \oplus k\varepsilon$, совпадающая на крае $\partial W$ с тривиализацией $\Xi_1 \cup [-\Xi_0]$. Операция несвязного объединение рассматриваемых пар, превращает классы кобордизма элементов множества $hImm^{fr}(m,k)$ в абелеву группу, которую мы не переобозначаем.

Группа $hImm^{fr,sf}(m,k)$ определена аналогичным образом. Эта группа представлена парами $(M;\Xi)$, где $M$– замкнутое (вообще говоря, неориентируемое) многообразие, $\Xi$– изоморфизм векторных расслоений $T(M) \oplus \kappa \oplus (k-1)\varepsilon$ и $(m+k)\varepsilon$ над $M$. Определение отношения кобордантности аналогично.

Для вычисления групп кобордизма погружений $h$-принцип был открыт Уэлсом, он формулируется следующим образом.

**Предложение 2.4.** *Естественные гомоморфизмы*

$$D^{fr} : Imm^{fr}(m,k) \to hImm^{fr}(m,k), \tag{3}$$

$$D^{fr,sf} : Imm^{fr,sf}(m;k) \to hImm^{fr,sf}(m,k), \tag{4}$$

*определенные посредством взятия дифференциала, являются изоморфизмами.*

**Доказательство**

Доказательство является прямым следствием Теорем 1.2 и 1.3. При этом Теорема 1.3 применяется к многообразию $W$, определяющему кобордизм двух погружений в открытой окрестности границы.

Определены гомоморфизмы стабилизации

$$J^{fr}(k_1,k_2) : Imm^{fr}(m,k_1) \to Imm^{fr}(m,k_2), \tag{5}$$

$$J^{fr,sf}(k_1,k_2) : Imm^{fr,sf}(m,k_1) \to Imm^{fr,sf}(n,k_2). \qquad (6)$$

Гомоморфизм $J^{fr}(k_1,k_2)$ определен следующим образом. Рассмотрим стандартное включение $I_{k_1,k_2} : \mathbb{R}^{n+k_1} \subset \mathbb{R}^{n+k_2}$ гиперпространства в коразмерности $k_2 - k_1$. Гомоморфизм $J^{fr,sf}(k_1,k_2)$ переводит пару $(\varphi,\Xi)$, представляющую элемент из $Imm^{fr,sf}(m,k_1)$, в пару $(\varphi',\Xi')$, представляющую элемент из $Imm^{fr,sf}(m,k_2)$, где $\varphi' = I_{k_1,k_2} \circ \varphi : M \to \mathbb{R}^{m+k_2}$, а тривиализация нормального расслоения к погружению $\varphi'$ задана по формуле $\Xi' = \Xi \oplus Id(k_2 - k_1)$. Определение гомоморфизма (6) совершенно аналогично.

Определим гомотопические аналоги построенных гомоморфизмов

$$hJ^{fr}(k_1,k_2) : hImm^{fr}(m,k_1) \to hImm^{fr}(m,k_2), \qquad (7)$$

$$hJ^{fr,sf}(k_1,k_2) : hImm^{fr,sf}(m,k_1) \to hImm^{fr,sf}(m,k_2). \qquad (8)$$

**Предложение 2.5.** *Гомоморфизмы (5),(6) являются изоморфизмами.*

**Доказательство**

Докажем, что гомоморфизм (5) является изоморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Imm^{fr}(m,k_2) & \xrightarrow{D^{fr}} & hImm^{fr}(m,k_2) \\ J^{fr}_{k_1,k_2}\uparrow & & \uparrow hJ^{fr}_{k_1,k_2} \\ Imm^{fr}(m,k_1) & \xrightarrow{D^{fr}} & hImm^{fr}(m,k_1) \end{array} \qquad (9)$$

Достаточно доказать, что гомоморфизм $hJ^{fr}_{k_1,k_2}$ является изоморфизмом. Для простоты обозначений рассмотрим случай $k_2 = k+1$, $k_1 = k$, общий случай рассматривается по индукции. Пусть пара $(M,\Xi')$ представляет элемент из $hImm^{fr}(m,k+1)$. Рассмотрим гомотопию $F_t : M \to SO(m+k+1)$ такую, что $F_0 = Id : M \to \{e\} \in SO(m+k+1)$, $F_1 = \Xi \circ I : M \to SO(m+k) \subset SO(m+k+1)$, где $\Xi'$ – некоторая тривиализация расслоения $T(M) \oplus k\varepsilon$. Гомотопия $F$ определена как семейство вращений (параметризованных многообразием $M$) слоев расслоения $(m+k+1)\varepsilon$ вдоль семейства окружностей больших кругов, соединяющих последний вектор оснащения $\Xi'$ с $m+k+1$-ым базисным вектором слоя. Пара $(M,\Xi)$ является искомой, т.е. $(hJ^{fr}_{k,k+1})^{-1}(M,\Xi') = (M,\Xi)$. Проверку корректности построенного отображения и доказательство тождеств $(hJ^{fr}_{k+1,k})^{-1} \circ hJ^{fr}_{k+1,k} = Id$, $hJ^{fr}_{k+1,k} \circ (hJ^{fr}_{k+1,k})^{-1} = Id$ мы опускаем. Предложение 1.5 доказано.

Приступим к доказательству Теоремы 1.1. Рассмотрим гомоморфизм (5) при $k_1 = 1$, $k_2 = 2m+2$, который по доказанному является изоморфизмом

$$J^{fr}(1, m+2) : Imm^{fr}(m,1) \to Imm^{fr}(m, m+2).$$

Воспользуемся изоморфизмом $Imm^{fr}(m, m+2) = Emb^{fr}(m, m+2)$. Окончание доказательства вытекает из теоремы Л.С.Понтрягина.

**Теорема 2.6 (Теорема Л.С.Понтрягина).** *Для произвольных натуральных $m, k$ определен изоморфизм $Emb^{fr}(m,k) = \pi_{m+k}(S^k)$.*

**Доказательство**

Дадим геометрическую конструкцию гомоморфизма $A : Emb^{fr}(m,k) \to \pi_{m+k}(S^k)$ и обратного к нему гомоморфизма $A^{-1}$. Пусть $\varphi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ – вложение, $\Xi$ – его оснащение. Пусть $U_\varphi \subset \mathbb{R}^{m+k}$– трубчатая окрестность вложения $\varphi$, $\pi : U_\varphi \to M$ – расслоение со слоем $D^k$ трубчатой окрестности на центральное подмногообразие. Оснащение $\Xi$ определяет тривиализацию $\pi : U_\varphi = D^k \times M^m \to M^m$ этого расслоения. Определено отображение $F : S^{m+k} \to S^k$ по формуле $F(x) = I \circ \pi(x)$, $x \in U_\varphi$, $I : D^k \to S^k$ – отображение, переводящее границу $\partial D^k$ в отмеченную точку $pt \in S^k$ и являющееся стандартным диффеоморфизмом на внутренности диска. Все точки из $(\mathbb{R}^{m+k} \cup \infty) \setminus U_\varphi$ отображаются в отмеченную точку $pt$.

Обратное отображение $A^{-1} : \pi_{m+k}(S^k) \to Emb^{fr}(m,k)$ строится по следующему правилу. Рассмотрим пунктированное отображение $(S^{m+k}, \infty) \to (S^k, pt)$, представляющее элемент гомотопической группы $\pi_{m+k}(S^k)$. Пусть $pt' \in S^k$ – антипод к отмеченной точке. Пользуясь теоремой о трансверсальности можно не ограничивая общности считать, что $F^{-1}(pt') \subset S^{m+k} \setminus \{\infty\}$ является подмногообразием и рассмотрим параметризацию $\varphi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ этого подмногообразия. Трубчатая окрестность $U_\varphi$ по теореме об обратном отображении представляется в виде прямого произведения $U_\varphi = D^k \times M^m$, причем отображение $F$ представляет проекцию $\pi : D^k \times M^m \to D^k$, где образ параметризует стандартную окрестность $pt' \in S^k$ малого радиуса. Проекция $\pi$ задает тривиализацию дискового расслоения $U_\varphi \to M$ или, эквивалентно, оснащение $\Xi$ вложенного подмногообразия $\varphi(M^m)$. Пара $(\varphi, \Xi)$ определяет требуемый элемент $A^{-1}(F)$ в группе $Emb^{fr}(m,k)$. Теорема 6 доказана.

Приступим к доказательству второй части Теоремы 1.1. Рассмотрим изоморфизм (6) для $k_1 = 1$, $k_2 = m+2$:

$$J^{fr,sf}(1, m+2) : Imm^{sf}(m,1) \to Imm^{fr,sf}(m, m+2).$$

Далее по аналогии с ориентированным случаем воспользуемся изоморфизмом $Imm^{fr,sf}(m, m+2) = Emb^{fr,sf}(m, m+2)$. Теперь построим изоморфизм $A : Emb^{fr,sf}(m, m+2) = \pi_{2m+2}(\Sigma^{m+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}))$. Рассмотрим пару $(\psi, \Xi)$, где $\psi : M^m \to \mathbb{R}^{m+k}$– вложение, $\Xi$ – изоморфизм трубчатой окрестности $U_{\varphi}$ с дисковым расслоением $\pi : M^m \times D^k$, ассоциированным с векторным расслоением $\kappa \oplus (m+1)\varepsilon \;\to\; M^m$. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$, дополнительное к отмеченной точке $pt' \in \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$ и пусть $V \subset \Sigma^{m+1}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$ – трубчатая окрестность этого подпространства в надстройке. Удобно представлять приведенную надстройку, полученную из пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty} \times S^{m+1}$ в результате отождествления подпространств $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty} \times pt'$ и $pt" \times S^{m+1}$ в отмеченную точку $pt \in \Sigma^{m+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty})$. Пространство $V$ представляет собой дисковое расслоение, ассоциированное с расслоением $(m+1)\varepsilon \oplus \kappa \;\to\; \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty-1}$. Определено каноническое отображение $g : U_{\varphi} \to V$. Воспользуемся тем, что $\Sigma^{m+1}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty} \setminus U_{pt}$, где $U_{pt}$– стягиваемая окрестность отмеченной точки, совпадает с $V$. Продолжим отображение $g$ до отображения всей сферы $S^{2m+2}$ в $\Sigma^{m+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty})$, отобразив дополнение окрестности $U_{\varphi}$ в дополнение окрестности $V$. Построенное пунктированное отображение $f : (S^{2m+2} \to \Sigma^{m+1}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty})$ является искомым и определяет элемент из $\pi_m(Q(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}))$.

Построенное отображение $A$ действительно является изоморфизмом, т.к. допускает обратное. Для отображения $S^{2m+2} \to \Sigma^{m+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty})$ прообраз подмногообразия $\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty-1} \subset \Sigma^{m+1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty})$ можно считать регулярным и структура регулярной окрестности $V$ этого подмногообразия индуцирует на прообразе требуемое оснащение $\Xi$. Теорема Доказана.

### Замечание

При доказательстве мы, фактически, воспользовались равенством $T((m+1)\varepsilon \oplus \kappa) = \Sigma^{m+1}\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$, в котором $T()$- пространство Тома, $\varepsilon \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$ – тривиальное одномерное расслоение, $\kappa$ – одномерное нетривиальное расслоение над бесконечномерным вещественным проективным пространством.

# 3 Элементы алгебраической топологии

## 3.1 Алгебра Стинрода и вычисления 2-примарных компонент гомотопических групп

Пусть $M$– градуированый $\mathbb{Z}/2$-модуль, причем при каждом $i \geq 0$ модуль $M_i$ порожден символом $Sq^i$. Для каждой пары $(a,b)$ целых чисел, удовлетворяющих неравенству $0 < a < 2b$ рассмотрим в дважды градуированной тензорной алгебре $\Gamma(M)$ модуля $M$ элемент $R(a,b) = Sq^a \otimes Sq^b + \sum_c C^{b-c-1}_{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c$. Пусть $Q$ – идеал алгебры $\Gamma(M)$, порожденный всеми такими элементами и элементом $1 + Sq^0$.

**Определение 3.1.** Алгеброй Стинрода $A$ называется факторалгебра $\Gamma(M)/Q$. Соотношения $R(a,b)$, называются соотношениями Адема. Нам потребуется лишь несколько первых соотношений $R(a,b)$.

$$\begin{array}{lll} Sq^1Sq^1 = 0 & & \\ Sq^1Sq^2 = Sq^3 & & \\ Sq^1Sq^3 = 0 & Sq^2Sq^2 = Sq^3Sq^1 & \\ Sq^1Sq^4 = Sq^5 & Sq^2Sq^3 = Sq^5 + Sq^4Sq^1 & Sq^3Sq^2 = 0 \end{array} \tag{10}$$

Последовательность $\{i_1, \ldots, i_r\}$ называется допустимой, если $i_j \geq 2i_{j+1}$ для любого $j < r$. Операция $Sq^I = Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_r}$, соответствующая допустимой последовательности, называется допустимой операцией. При этом значение $e(I) = i_1 - i_2 - \cdots - i_r = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \cdots + i_r = (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \cdots + i_r$ для любой допустимой последовательности называется ее избыточностью.

**Вычисление когомологий пространств Эйленберга-Маклейна.**

Рассмотрим когомологии $H^*(K(\mathbb{Z}/2,q);\mathbb{Z}/2)$, $H^*(K(\mathbb{Z},q);\mathbb{Z}/2)$, которые для краткости обозначим через $H(\mathbb{Z}/2,q)$, $H(\mathbb{Z},q)$ соответственно. Нам потребуется описание этих градуированных модулей.

**Теорема 3.2.** *1. Для произвольного $q \geq 1$, кольцо $H(\mathbb{Z}/2,q)$ является алгеброй многочленов над $\mathbb{Z}/2$ от образующими вида $Sq^I i_q$, где $I$– произвольная допустимая последовательность с избыточностью $e(I) < q$.*

*2. Для произвольного $q \geq 1$, кольцо $H(\mathbb{Z},q)$ является кольцом многочленов над $\mathbb{Z}/2$ от образующих вида $Sq^I i_q$, где $I$– произвольная допустимая последовательность с $e(I) < q$,последний член которой $i_r$ больше 1.*

Вычислим 2-компоненты групп кобордизмов $Imm^{fr}(n,1)$, $Imm^{sf}(n,1)$, $n = 1,2$ методом убивающих пространств. Согласно Теоремы 2.1, эти группы изоморфны группам $\pi_{n+1}(S^n)$, $\pi_{n+1}(\Sigma^n \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$ при больших значениях $n$. Для вычисления гомотопических групп построим первое убивающее пространство и вычислим его группы когомологий в размерностях $n, n+1, n+2$.

### Общий метод построения убивающего модуля

Рассмотрим градуированное кольцо когомологий $R^i$ с коэффициентами над полем $\mathbb{Z}/2$, с ненулевыми группами градуировки $i = n, n+k, n+k+1, \dots, 2n-1, \dots$. Строится градуированное кольцо когомологий $X$, элементы которого в размерностях, не превышающих $2n-1$, присоединены к биградуированному подфакторкольцу кольца $R \otimes H(G, n+k-1)$. Значение $n+k$, $k > 0$ совпадает с наименьшей градуировкой в $R$, для которой модуль $R^{n+k}$, оказывается ненулевым, за исключением $k = 0$. Переход к подкольцу в $R \otimes H(G, n+k-1)$ происходит в результате перехода к ядру кольцевого гомоморфизма трансгрессии $\tau : H^{*-1}(G, n-1) \to R$. При этом $Hom(G; \mathbb{Z}/2) = R^{n+k}$. Обозначим это ядро через $KH \subset H(G, n-1)$. Факторизация биградуированного кольца $R \otimes KH$ индуцирована факторизацией первого сомножителя $R$ по образу гомоморфизма трансгрессии. Гомоморфизм трансгрессии коммутирует с действием Алгебры Стинрода и повышает градуировку на 1. При вычислении гомоморфизма трансгрессии, следует воспользоваться тем, что фундаментальный класс $[j_{n+k-1}] \in H^{n+k-1}(G, n+k-1)$ переходит в образующую группы $R^{n+k}$.

Метод убивающих модулей работает в случае, когда все модули $R^i$, $n < i < 2n$ получаются в результате приведения модулей целочисленных когомологий, которые все имеют конечный порядок (модуль $R^n$ младшей градуировки при этом не рассматривается). Порядки образующих каждого модуля $R^i$, $i > n$ можно определить путем вычисления значений высших операторов Бокштейна $\beta^i : R^i \to R^{i+1}$. Элемент $x \in R^i$, получаеный приведением целочисленного элемента, имеет порядок $2^s$, если $\beta^{i-1}(x) = 0$, при $i < s$, но $\beta^s \ne 0$. При этом $\beta^1$ совпадает с $Sq^1$. Если значения высших гомоморфизмов Бокштейна всех порядков на элементе $x$ равно 0, то этот элемент имеет бесконечный порядок.

При вычислении порядков элементов кольца $X$ достаточно знать порядки элементов кольца $R$. Следует пользоваться тем, что если элемент $x \in R^j$, $j \le 2n-1$ не лежит в образе гомоморфизма трансгрессии и его смежный класс $x'$ представляет, следовательно, элемент из $X$, но элемент $\beta^i(x)$ ненулевой, и лежит в образе гомоморфизма трансгрессии,

$\tau(y) = \beta^i(x)$, то $\beta^i(x') = 0$, а значение $\beta^{i+1}(x')$ вычисляется как класс смежности элемента, представленного $Sq^1(y)$. Элемент $Sq^1(y)$ действительно представляет элемент из $X$, поскольку лежит в $KH$, ввиду того, что $\tau(Sq^1(y)) = Sq^1(\tau(y)) = Sq^1(\beta^i(x)) = 0$. Здесь $\tau$ повышает грудуировку на 1, а $\beta^i$ также повышает градуировку на 1 так, что градуировка элемента $Sq^1(y)$ на 1 больше градуировки $x$.

Для вычисления 2-компонент групп $Imm^{fr}(m,1)$, которые мы будем обозначать также как и сами группы (нас интересует случай $m = 1,2$), строят цепочку убивающих модулей $X_0, X_1, \dots, X_m$, начиная с модуля $X_0 = H(\mathbb{Z}/,n)$, убивая в модуле $X_0$ все образующие градуировки $n+1$ (если такие найдутся), оставляя фундаментальный класс $[i_n] \in H^n(\mathbb{Z}/,n)$. Затем в полученном модуле $X_1$ убивают образующие градуировки $n+2$ и т.д. Модуль $X_m^{m+1}$ оказывается при этом группой $Imm^{sf}(m,1)\otimes\mathbb{Z}/2$. Для вычисления самой группы $Imm^{fr}(m,1)$ требуется знать порядки высших гомоморфизмов Бокштейна на образующих модуля $X_m^{m+1}$.

Аналогично поступают при вычислении групп $Imm^{sf}(m,1)$ (нас интересует случай $m = 1,2$). Строят цепочку убивающих модулей $X_0, X_1, \dots, X_m$, начиная с модуля $X_0$, который представляет кольцо когомологий $H^*(\Sigma^n\mathbb{RP}^\infty)$, а модульная структура определяется действием алгебры Стинрода на этом кольце. Убиваются в модуле $X_1$ все образующие градуировки $n+1$ (если такие найдутся), за исключением фундаментального класса $[i_n] \in H^n(\Sigma^n(\mathbb{RP}^\infty))$. Затем модулем $X_2$ убиваются образующие градуировки $n+2$ в модуле $X_1$ и т.д. Модуль $X_m^{m+1}$ оказывается при этом группой $Imm^{sf}(m,1) \otimes \mathbb{Z}/2$. Для вычисления самой группы $Imm^{sf}(m,1)$ вычисляют высшие гомоморфизмы Бокштейна.

С алгебраической точки зрения метод убивающих модулей представляет собой построение свободной резольвенты над алгеброй Стинрода кольца когомологий данного клеточного пространства. Этот метод был открыт (в категории симплициальных множеств) М.М.Постниковым.

### Вычисление группы $Imm^{fr}(1,1)$

В качестве модуля $X_0$ выбирают $H(\mathbb{Z},n)$. Поскольку $H^{n+1}(\mathbb{Z},n) = 0$, имеем $X_0 = X_1$. Модуль $H^{n+2}(\mathbb{Z},n)$ представляется образующей $Sq^2[i_n]$. Вычислим порядок этой образующей. Поскольку $Sq^1Sq^2[i_n] = Sq^3[i_n] \neq 0$, порядок образующей равен 2. Итак, $Imm^{sf}(1,1) = \mathbb{Z}/2$.

**Вычисление группы** $Imm^{sf}(1,1)$

В качестве модуля $X_0$ выбирают модуль $H^*(\Sigma^n\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)$. Этот модуль имеет по одной образующей в каждой размерности $i$, $i \geq n$, которые мы будем обозначать через $t_i$. Действие алгебры Стинрода на образующих с учетом градуировки $\leq n+4$ определяется следующими уравнениями $Sq^i(t_n) = 0$, $Sq^1(t_{n+1}) = t_{n+2}$, $Sq^i(t_{n+1}) = 0$, $i > 1$; $Sq^1(t_{n+2}) = 0$, $Sq^2(t_{n+2}) = t_{n+4}$, $Sq^i(t_{n+2}) = 0$, $i > 2$; $Sq^1(t_{n+3}) = t_{n+4}$.

Модуль $X_1$ получают, как убивающий образующую $t_{n+1}$. Поскольку эта образующая второго парядка, в качестве $G$ выбирают $\mathbb{Z}/2$. Таким образом, модуль $X_1$ получается переходом к подфактормодулю в $X_0 \otimes H(\mathbb{Z}/2,n)$. Фундаментальный класс $[j_n] \in H^n(\mathbb{Z}/2,n)$ трансгрессируется в образующую $t_{n+1}$. Далее, элемент $Sq^1[j_n]$ не лежит в $KH$, ввиду соотношения $\tau Sq^1[j_n] = Sq^1\tau[j_n] = Sq^1(t_{n+1}) = t_{n+2}$. Аналогично, элемент $Sq^2Sq^1[j_n]$ не лежит в $KH$ ввиду того, что $\tau Sq^2Sq^1[j_n] = Sq^2Sq^1[t_{n+1}] = t_{n+4}$. Итак, подмодуль $KH$ в размерностях до $n+3$ включительно, порожден элементом $Sq^2[j_n]$, градуировки $n+2$ и элементами $Sq^3$, $t_{n+3}$ градуировки $n+3$. Образ трансгрессии содержит все элементы градуировок $n+1$, $n+2$ и не содержит класс смежности, представленный элементом $t_{n+3}$. Осталось заметить, что $Sq^1(Sq^2[j_n]) = Sq^3[j_n]$ лежит в $KH$, следовательно, единственная образующая модуля $X_1$ градуировки $n+2$ имеет порядок 2. Этим доказано, что $Imm^{sf}(1,1) = \mathbb{Z}/2$.

**Вычисление группы** $Imm^{fr}(2,1)$

Построим модуль $X_2$, рассмотрев в качестве убивающего модуля $H(\mathbb{Z}/2,n+1)$. Фундаментальный класс $[j_{n+1}]$ трансгрессируется в $Sq^2[i_n]$. При этом $Sq^1[j_n]$ трансгрессируется в $Sq^3[i_n]$, а единственный элемент градуировки $n+3$ в модуле $X_2$ порожден классом смежности элемента $Sq^2[j_{n+1}]$, который лежит в $KH$, поскольку $\tau Sq^2[j_{n+1}] = Sq^2Sq^2[i_n] = 0$, ввиду соотношений $Sq^2Sq^2 + Sq^3Sq^1 = 0$ и $Sq^1[i_n] = 0$. Вычисляя гомоморфизм Бокштейна, получим $Sq^1Sq^2[j_n] = Sq^3[j_n]$ и этот элемент лежит в $KH$, поскольку $\tau Sq^3[j_n] = Sq^3Sq^2[i_n] = 0$. Доказано, что $Imm^{fr}(2,1) = \mathbb{Z}/2$.

**Вычисление группы** $Imm^{sf}(2,1)$

Построим модуль $X_2$, рассмотрев в качестве убивающего модуля модуль $H(\mathbb{Z}/2,n+1)$. Фундаментальный класс $[k_{n+1}]$ трансгрессируется в $Sq^2[j_n]$. Элемент $Sq^1[k_{n+1}]$ трансгрессируется в элемент $Sq^3[j_n]$. Следовательно, единственный элемент в $X_2$ градуировки $n+3$ порожден классом смежности элемента $t_{n+3}$. Этим доказано, что $Imm^{sf}(2,1)\otimes\mathbb{Z}/2=\mathbb{Z}/2$. Теперь вычислим порядок элемента $t_{n+3}$.

Поскольку $Sq^1(t_{n+3}) = t_{n+4}$, а $\tau(Sq^2Sq^1[j_n]) = t_{n+4}$, первый гомоморфизм Бокштейна в модуле $X_1$ равен 0, в то время, как $\beta^2[j_n]$ не равен 0 (из-за соотношения $Sq^1Sq^2Sq^1[j_n] = Sq^3Sq^1[j_n]$) и этот элемент представлял элемент их $KH$ в силу $\tau(Sq^3Sq^1[j_n]) = Sq^3Sq^1[t_{n+1}] = 0$. С другой стороны, в $X_2$ элемент $Sq^3Sq^1[j_n]$ уже представляет нулевой класс, поскольку $Sq^3Sq^1[j_n]=Sq^2Sq^2[j_n]$ и в этот элемент трансгрессируется элемент $Sq^2[k_{n+1}]$. Наконец, $Sq^1Sq^2[k_{n+1}] = Sq^3[k_{n+1}]$ трансгрессируется в элемент $Sq^3Sq^2[j_n]=0$. Итак, доказано, что $Imm^{sf}(2,1)=\mathbb{Z}/8$.

Интересно отметить, что в формуле (16) значение $\sigma(mod2)$ соответствует когомологическому классу $t_{n+3}$, который определен в $X_0$ и выживает в $X_2$, значение $\pi\delta\delta(mod2)$ соответствует когомологическому классу $Sq^2[j_n]$, который определен в $X_1$ и выживает в $X_2$ и, наконец, коцикл $\pi\delta\delta$ соответствует когомологическому классу $Sq^2[k_{n+1}]$ из $X_2$.

## 3.2 Композиционное соотношение $\Pi_1\times\Pi_1\to\Pi_2$

Рассмотрим хопфовские отображения $\nu_2 : S^{n+2}\to S^{n+1}$, $\nu_1 : S^{n+1}\to S^n$, $n\geq 3$, определенные образующей группы $\Pi_1$. Мы докажем, что композиция $\nu_2\circ\nu_1 : S^{n+2}\to S^n$ определяет образующую группы $\Pi_2$.

Рассмотрим клеточное пространство $X_1=S^n\cup_{\nu_1}D^{n+2}$, полученное из сферы $S^n$ в результате подклейки $n+2$-мерного диска по отображению $\nu_1$ границы. Обозначим фундаментальный класс пространства $X_1$ через $[i_n]\in H^{n+1}(X_1;\mathbb{Z}/2)$, а образующую группы $H^{n+2}(X_1;\mathbb{Z}/2)$ обозначим через $j_{n+2}$. Воспользуемся тем, что хопфовский элемент детектируется операцией $Sq^2$, т.е. $Sq^2[i_n]=j_{n+2}$.

Рассмотрим отображение $\nu_2 : S^{n+2}\to S^{n+1}$ и предположим, что композиция $\nu_2\circ\nu_1 : S^{n+2}\to S^{n+1}\to S^n$ оказалась гомотопной нулю. Приведем это предположение к противоречию. Рассмотрим гомотопию $F_+ : D^{n+3}\to S^n$ отображения $\nu_2\circ\nu_1$ к нулю, $F_+|_{\partial D^{n+3}}=\nu_2\circ\nu_1$ и рассмотрим другую гомотопию $F_- : D^{n+3}\to X_1$, $F_-|_{\partial D^{n+3}}=I\circ\nu_2\circ\nu_1$, где $I : S^n\subset X_1$ – вложение, которая определена без дополнительных предположений как конус над отображением $\nu_2\circ\nu_1$. Две построенные гомотопии определяют отображение $F=F_+\cup F_- : S^{n+3}\to X_1$. Далее определено клеточное пространство $X_2=X_1\cup_F D^4$.

Поскольку $Sq^2[i_n]=j_{n+2}$ в $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$, то аналогичное соотношение выполнено и в $H^*(X_1;\mathbb{Z}/2)$. По аналогичным соображением $Sq^2[j_{n+2}] = k_{n+4}$, где $k_{n+4}\in H^{n+4}(X_2;\mathbb{Z}/2)$ – образующая. Но $Sq^2Sq^2+Sq^3Sq^1[i_n] = 0$ по соотношению Адема. С другой стороны, $Sq^3Sq^1[i_n] = 0$ по размерностным соображениям. Следовательно, $Sq^2[j_{n+2}] = 0$, что противоречит выбору второго приклеивающего отображения.

Итак, доказано, что образующая группы $\Pi_2$ получена как композиция двух образующих из группы $\Pi_1$. На языке групп кобордизма $Imm^{fr}$ это означает, что образующая из $\Pi_2 = Imm^{fr}(2,1) = Imm^{fr}(2,2)$ получена как оснащенное погружение в результате произведения двух экземпляров погружения $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ с одной точкой трансверсального самопересечения определяющего образующую в группе $Imm^{fr}(1,1)$.

### Задачи

1. Рассмотреть отображение убивающих модулей, индуцированное гомоморфизмом $H(\mathbb{Z}, n) \to H^*(\Sigma^n \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2)$ и вычислить индуцированный гомоморфизм первых и вторых убивающих пространств, что доставляет вычисление естественных гомоморфизмов $Imm^{fr}(1,1) \to Imm^{sf}(1,1)$, $Imm^{fr}(2,1) \to Imm^{sf}(2,1)$.

2. Изучить отображение Кана-Придди $f : \mathbb{RP}^n \to \Omega^n(S^n)$, при очень большом $n$ при помощи метода убивающих пространств. (Отображение $f$ переводит прямую из $\mathbb{R}^{n+1}$ в отображение симметрии в ортогональной гиперплоскости, которое при ограничении на единичную сферу определяет отображение $S^n \to S^n$.) Вычислить гомоморфизм $Imm^{sf}(1,1) \to Imm^{fr}(2,1)$, индуцированный этим отображением.

# 4 Квадратичные формы и их простейшие инварианты. Элементарные приложения в геометрической топологии

## 4.1 Квадратичные формы над $\mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z}/4$. Инвариант Арфа-Браун.

Пусть $V$–векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2$ конечной размерности, снабженное невырожденной симметричной билинейной формой

$$(x,y) \to < x, y >$$

со значениями в $\mathbb{Z}/2$.

**Определение 4.1.** Квадратичная $\mathbb{Z}/4$-форма на $V$, ассоциированная с билинейной формой $<,>$, есть отображение $q : V \to \mathbb{Z}/4$, удовлетворяющее равенству

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2 < x, y > .$$

В предположении, что $< x, x >$ для произвольного $x$ принимает нулевые значения, а значения отображения $q$ лежат в подгруппе $\mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Z}/4$, квадратичная форма $q$ оказывается $\mathbb{Z}/2$– квадратичной формой.

**Определение 4.2.** Квадратичная $\mathbb{Z}/4$ $(\mathbb{Z}/2)$–форма $q : V \to \mathbb{Z}/4$ называется нейтральной, если существует подпространство $H \subset V$ половинной размерности, на котором $q$ обращается в нуль.

Обычным образом определяется прямая сумма $q_1 \oplus q_2 : V_1 \oplus V_2 \to \mathbb{Z}/4$ двух квадратичных форм $q_1 : V_1 \to \mathbb{Z}/4$, $q_2 : V_2 \to \mathbb{Z}/4$.

**Определение 4.3.** Группой Витта $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/4)$, $(WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2))$ называется группа, полученная в результате факторизации полугруппы квадратичных $\mathbb{Z}/4$ $(\mathbb{Z}/2)$ форм отноносительно операции прямого суммирования по полугруппе нейтральных форм.

**Теорема 4.4.** *Группа $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/4)$ является циклической группой порядка 8 и порождена квадратичной формой $q_+$ $(q_-)$ на одномерном модуле, которая принимает на единственной образующей значение $+1$ $(-1)$ соответственно. Группа $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)$ является циклической группой порядка 2, порожденная квадратичной формой $q_1$ на двумерном модуле с образующими $t_1, t_2$, с билинейной формой $< t_1, t_1 >=< t_2, t_2 >= 0$, $< t_1, t_2 >= 1$, причем значения квадратичной формы определяются по формуле $q_1(t_1) = q_1(t_2) = 1$. Естественный гомоморфизм $A : WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2) \to WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/4)$, при котором $\mathbb{Z}/2$ форма рассматривается как $\mathbb{Z}/4$ форма при включении $\mathbb{Z}/2 \subset \mathbb{Z}/4$, является мономорфизмом.*

**Замечание.** Инвариантом Арфа называется класс эквивалентности $\mathbb{Z}/2$-квадратичной формы в группе $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)$. Инвариантом Браун называется класс эквивалентности $\mathbb{Z}/4$-квадратичной формы в группе $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/4)$. При этом принято определять базисный элемент в $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/4)$ образующей $q_+$.

### Доказательство Теоремы

Доказательство вытекает из следующих утверждений.

–1. Любая квадратичная форма $q$ не являющаяся изотропной, т.е. принимающая нечетные значения, разлагается в прямую сумму одномерных форм $q_+$ или $q_-$.

–2. Квадратичные формы $4q_+$ и $4q_-$ изоморфны. В частности, $8q_+$, $8q_-$ является нейтральной, поскольку $q_+ \oplus q_-$ нейтральная.

–3. Любая изотропная $q$ форма разлагается в прямую сумму некоторого числа двумерных форм $q_1$ и нейтральных форм $q_0$, где $q_0(t_1) = q_0(t_2) = 0$.

–4. Квадратичная форма $2q_1$ является нейтральной.

–5. Квадратичные формы $q_1$, $4q_+$ эквивалентны в группе Витта.

Докажем 1. Отображение $x \to < x, x >$, $x \in V$ линейно, следовательно, из неизотропности $q$ вытекает существование $c$ такого, что $< c, x > = < x, x >$. В предположении $dim(V) \geq 2$, пространство $V$ содержит вектор $y$ такой, что $y \neq c$ и $< y, y >= 1$. Обозначим через $L_y \subset V$ – подпространство, ортогональное к $y$. Ограничение билинейной формы $<$ на $L_y$ неизотропно, поскольку если для произвольного $z \in L_y$ $< z, z >=< z, c >= 0$, то $c$ ортогонально к $L_y$ и,следовательно, выполнено $y = c$, что противоречит выбору $y$.

Далее рассуждаем по индукции для ограничения $q$ на $L_y$. В итоге получим разложение формы $q$ в прямую сумму одномерных невырожденных попарно ортогональных форм, что доказывает утверждение 1.

Докажем 2. Рассмотрим форму $q_+$, определенную на $V$, $dim(V) = 1$, и определим изоморфизм $\varphi : V^4 \to V^4$ по формулам $\varphi : V \oplus V \oplus V \oplus V \to V \oplus V \oplus V \oplus V$, $\varphi(x, 0, 0, 0) = (0, x, x, x)$, $\varphi(0, x, 0, 0) = (x, 0, x, x)$, $\varphi(0, 0, x, 0) = (x, x, 0, x)$, $\varphi(0, 0, 0, x) = (x, x, x, 0)$. Из построения очевидно, что $\varphi$ переводит форму $4q_+$ в форму $4q_-$. Утверждение 2 доказано.

Докажем 3 и 4. Произвольная изотропная билинейная форма $<, >$, на $V$ разлагается в ортогональную прямую сумму двумерных форм. При этом квадратичная форма $q = 2q_1$ является нейтральной, поскольку содержит двумерное подпространство, порожденное векторами $x_1 + x_2 + x_3$, $x_2 + x_3 + x_4$, на которых значение $q$ обращается в нуль. Утверждения 3 и 4 доказаны.

Докажем 5. Рассмотрим форму $3q_+$ на $W$ и докажем, что эта форма представляется в виде прямой суммы $q_- \oplus q_1$. Рассмотрим двумерное подпространство $L_1 \subset W$, порожденное вектором $t_1 + t_2 + t_3$. Рассмотрим дополнительное подпространство $L_2 \subset W$, порожденное векторами $t_2 + t_3$, $t_1 + t_3$. Пространства $L_1$ и $L_2$ ортогональны относительно билинейной формы $<, >$, и, кроме того, ограничение $3q_+$ на $L_1$ совпадает с $q_-$, а ограничение на $L_2$ совпадает с $q_1$. Утверждение 5 и теорема полностью доказаны.

**Теорема 4.5.** *Существуют естественные изоморфизмы* $\alpha^{sf} : Imm^{sf}(2,1) \to WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/4)$, $\alpha^{fr} : Imm^{fr}(2,1) \to WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/4)$, *причем следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} Imm^{fr}(2,1) & \xrightarrow{J} & Imm^{sf}(2,1) \\ \alpha^{sf}\downarrow & & \alpha^{fr}\downarrow \\ WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{A} & WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/4). \end{array}$$

Итак, группы $Imm^{sf}(2,1)$, $Imm^{fr}(2,1)$ полностью вычислены.

### Доказательство Теоремы 2.13

Построим гомоморфизм $\alpha^{sf} : Imm^{sf}(2,1) \to WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/4)$. Пусть $f : M^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ – погружение, представляющее элемент из $Imm^{sf}(2,1)$. Обозначим через $V$ группу гомологий $H_1(M^2;\mathbb{Z}/2)$, через $<,>$ – билинейное спаривание на $V$, определенное в смысле двойственности Пуанкаре. Значение квадратичной $\mathbb{Z}/4$-формы $q : V \to \mathbb{Z}/4$ определим следующим образом. Пусть $x \in V$ цикл в группе неориентированных гомологий. Рассмотрим вложенние $\varphi : S^1 \subset M^2$, представляющее класс гомологий цикла $x$. Рассмотрим лист Мебиуса, если цикл $x$ неориентированный, $w_1(x) = 1$ и цилиндр, если $x$ ориентированный. Обозначим лист Мебиуса или цилиндр через $K^2$. Определено вложение $i : K^2 \subset M^2$, как параметризация регулярной окрестности (утолщение) вложения $f$. Вложение $x$ определяет погружение $g_x = \varphi \circ i : K^2 \subset \mathbb{R}^3$ (если диаметр $K^2$ достаточно мал, то погружение $f \circ I$ является вложением, в предположении общего положения). Нетрудно проверить, что класс регулярной гомотопии погружения $g_x$ не зависит от выбора вложения $f$, представляющего данный цикл когомологий. Погружение $g_x$ представляет элемент группы $Imm^{sf}(1,2) = \mathbb{Z}/4$, если $K^2$ лист Мебиуса и элемент $[g_x]$ из группы $Imm^{fr}(1,2) = \mathbb{Z}/2$, если $K^2$ цилиндр. Элемент $[g_x]$ определяет значение $q(x)$ квадратичной формы на элементе $x$.

Нетрудно проверить, что квадратичная форма $q$ ассоциирована с билинейной формой $<,>$ и, кроме того, при перестройке погружения $f$ по ручке индекса 1 к форме $q$ прибавляется (или отнимается) форма $q_0$, которая является нейтральной. Таким образом, гомоморфизм $\alpha^{sf}$ определен корректно. Рассуждения для $\alpha^{fr}$ совершенно аналогичны. Коммутативность диаграммы очевидна по построению. Теорема 2.13 доказана.

## 4.2 Проблема распроектирования и аппроксимации

Перейдем к связи изотропных квадратичных форм с задачей распроектирования отображений общего положения. Начнем с определения.

**Определение 4.6.** Пусть $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ отображение общего положения ориентированной поверхности. Скажем, что отображение $f$ распроектируется во вложение, если существует вложение $\bar{f} : M^2 \subset \mathbb{R}^4$ такое, что $f = \pi \circ \bar{f}$, где $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$– стандартная ортогональная проекция на гиперпространство, содержащее образ отображения $f$.

**Замечание 4.7.** В условиях данных размерностей отображение $f$ общего положения распроектируется во вложение, тогда и только тогда, когда оно дискретно реализуется в $\mathbb{R}^4$, т.е. существует вложение $g : M^2 \subset \mathbb{R}^4$ такое, что $dist(g; I \circ f) < \varepsilon$, $I : \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$– стандартное вложение.

Рассмотрим отображение $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$. Скажем, что задано локальное распроектирование $f(M^2)$, если для произвольной точки общего положения $x \in \Delta_2(f)$ на кривой двукратного самопересечения определен порядок прообразов $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in M^2$ точки $x$ при распроектированни вдоль дополнительной оси координат и это правило распроектирования непрерывно зависит от выбора точки, в частности, не меняется при движении по ветви кривой $\Delta_2$ через троекратную точку пересечения. Нетрудно проверить, что задание локального распроектирования эквивалентно заданию ориентации на каждой ветви кривой $\Delta_2$, причем на вертикальных участках кривой в окрестности троекратной точки ориентации должны совпадать.

Троекратные точки $y \in \Delta_3$ делятся при этом на два типа. Первый из типов $A$ позволяет распроектировать прообразы $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ троекратной точки в согласовано с правилом локального распроектирования. Это означает, что правило локального распроектирования определяет полный порядок на прообразах точки $y$, как точек, лежащих на прообразах ветвей $\Delta_2$ на $M^2$. В точке типа $B$, напротив, локальное распроектирование определяет частичный (циклический) порядок прообразов. Очевидно, что данное локальное распроектирование $f(M^2)$ определяет распроектирование поверхности тогда и только тогда, когда все точки троекратного самопересечения имеют тип $A$.

Для данного отображения $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ и данного локального распроектирования $O$ мы построим на $V = H_1(M^2; \mathbb{Z}/2)$ четную изотропную квадратичную форму $q = q(f, O)$, значения которой в группе Витта $WQ(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)$ определяет частичное алгебраическое препятствие к задаче распроектирования с данным локальным правилом распроектирования на кривой двукратных точек.

**Определение 4.8.** Определим значение квадратичной формы $q(f,O)$ на цикле $x \in V$ как сумму $q(x) = a + b$, где $a \in Imm^{fr}(1,2)$ – класс регулярной гомотопии погруженного цилиндра $g_x(K^2) \looparrowright \mathbb{R}^3$ (см. подробности в Теореме 2.13), $b$– число точек пересечения петли $\varphi(S^1)$, представляющей цикл $x$, с прообразами кривой $\Delta_2$ на $M^2$, которые являются верхними относительно локального распроектирования $O$.

**Теорема 4.9.** *Для данного отображения $f$ общего положения и локального распроектирования $O$ число точек троекратного самопересечения типа $B$ вычисляется как класс эквивалентности квадратичной формы $q(f,O)$ в группе $WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$.*

### Доказательство Теоремы 4.9

Рассмотрим образ $f(M^2)$ как поверхность с особенностями в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^4$, и обозначим через $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество точек тройного самопересечения типа $B$. Обозначим через $U_X \subset \mathbb{R}^4$ объединение непересекающихся шаров $U_B = \cup U_i$ малого радиуса с центрами в точках $X$.

Рассмотрим образ $f(M^2) \setminus (f(M^2) \cap U_B))$ и обозначим поверхность, параметризующую этот образ через $N^2 = M^2 \setminus D$, где $D = \cup d_i$ – объединение дисков с центрами в прообразах троекратных точек самопересечения. Локальное распроектирование $O$ определяет вложение $\bar{f} : N^2 \subset \mathbb{R}^4 \setminus U_X$, однозначное с точностью до вертикальной изотопии вдоль слоев проекции $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Обозначим через $S_i$ – 3-мерную сферу, ограничивающую шар $D_i$.

Рассмотрим зацепление $(\bar{N}^2) \cap S_i$ через $L_i \subset S_i$ и $L = \cup_i L_i$. Зацепление $L$ ограничивает вложенную поверхность $\bar{f}(N^2) \subset \mathbb{R}^4 \setminus U_X$. Каждое зацепление $L_i \subset S_i$ является зацеплением колец борромео и имеет $Arf$-инвариант 1. Следовательно, $Arf$ инвариант всего зацепления $L$ можно вычислить как четность числа точек типа $B$ на исходной поверхности. С другой стороны, $Arf$-инвариант зацепления $L$ можно вычислить по вложенной характеристической поверхности $\bar{f}(N^2)$, которая ограничивает это зацепление. Квадратичная форма $q$, которая определена на группе $H_1(N^2, \partial N^2; \mathbb{Z}/2) = H_1(M^2; \mathbb{Z}/2)$ и называется формой характеристической поверхности определяет элемент в группе $WQ(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ и этот элемент равен $Arf(L)$.

Определение квадратичной формы $q$ таково. Рассмотрим элемент $a \in H_1(N^2, \partial N^2; \mathbb{Z}/2)$ и вложенную окружность $a : S^1 \subset$

$N^2$, представляющую этот элемент, вложение мы при этом не переобозначаем. Рассмотрим вложение $j : D^2 \subset U_X$ общего положения, которое в окрестности $\bar{f}(N^2)$ в точках на $\partial D^2$ строго вертикально по отношению к проекции $\pi$. Значение $q(a)$, $a \in H_1(N^2, \partial N^2; \mathbb{Z}/2)$ определено как четность числа точек пересечения диска $D^2 \subset \mathbb{R}^4$ с поверхностью $\bar{f}(N^2)$.

Нетрудно проверить, что $q(a) = q(f, O)(a')$, где $a' \in H_1(M^2; \mathbb{Z}/2)$ – цикл, представленный вложением $a$. Таким образом, $q(f, O)$ соответствует квадратичной форме на характеристической поверхности зацепления $L$ и Теорема 4.9 доказана.

## Задачи

1. Доказать утверждение из замечания 4.7 о совпадении понятий распроектирования и реализации для поверхностей общего положения в $\mathbb{R}^3$.

2. Вычислить квадратичные формы и классы кобордизма в группах $Imm^{sf}(2,1)$, $Imm^{fr}(2,1)$, для каждой поверхности положительного рода, определенной во введении.

3. Придумать геометрическое доказательство того, что связная сумма двух одинаковых копий поверхностей Боя регулярно гомотопна бутылке Клейна на рис. 1b. Доказать, что связная сумма 4 одинаковых копий поверхности Боя перестраивается в тор Понтрягина.

4. Изучить локальные распроектирование для погруженного тора Константинова. Убедится, что при надлежащем выборе локального распроектирования (инвариантном относительно вращения погруженной поверхности вокруг оси на угол $\frac{2\pi}{3}$) число тройных точек типа $B$ окажется четным.

5. Убедится, что при любом выборе локального распроектирования тора Понтрягина, ассоциированная квадратичная форма оказывается нейтральной.

6. Придумать поверхность (перестроить тор Константинова) для которой четность числа точек троекратного самопересечения типа $B$ является нечетной для любого выбора локального распроектирования.

7. Доказать, что погруженная сфера, полученная в результате параметризации границы погруженной регулярной окрестности поверхности Боя не распроектируется.

8. Допускают ли распроектирования сферы Милнора и Морена?

9. Доказать, что никакое погружение общего положения проективной плоскости не допускает распроектирования. Придумать отображение (с

особенностями) общего положения проективной плоскости в $\mathbb{R}^3$, которое допускает распроектирование.

# 5 Элементы теории особенностей

## 5.1 Особенности $I$-структуры для отображений $M^3 \to \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

Определим в пространстве $IMM^\circ(2,1)$ подпространство $Q \subset IMM^\circ(2,1)$ устойчивых погружений $f : M \to \mathbb{R}^3$ относительно ортогональной проекции $\rho \oplus \pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Будем называть такие погружения $\pi$-устойчивыми. Это означает, что мы рассматриваем такие погружения, для которых произвольное близкое отображение $f' : M \to \mathbb{R}^3$ таково, что найдутся диффеоморфизмы $D_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $D_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G : M \to M$ такие, что $G \circ f \circ (D_1 \oplus D_2) = f'$.

**Теорема 5.1.** *Погружение $f(M)$ является $\pi$-устойчивым тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

*A. Погруженная поверхность трансверсально самопересекается и проекция $\pi \circ f$ имеет устойчивые особенности (складки и сборки).*

*B. Кривая самопересечения $\Delta_2$ и кривая особенностей $\Sigma$ пересекаются на поверхности $f(M)$ в общем положении. Обозначим $\Sigma \cap \Delta$ через $Q$. Это означает, что в каждой точке $q_i \in Q$ ровно один лист поверхности не содержит кривую $\Sigma^1$ и трансверсально (в пространстве) пересекает эту кривую; каждая точка $q_i$ не лежит ни в $\Delta_3$ ни в $\Sigma^{1,1}$.*

*C. Проекции $\pi(\Sigma)$ и $\pi(\Delta)$ пересекаются и самопересекаются на плоскости в общем положении (как стратифицированные кривые с особенностями $\Sigma^{1,1}$, $\Delta_3$ и $\pi(Q)$).*

### Доказательство

Условие устойчивости, очевидно, влечет условия A-C как локальные условия общего положения. Пусть, напротив, условия A-C выполнены. Тогда из условия B вытекает $\pi$-устойчивость отображения $f$ в окрестности точек $q_i$, а условие C позволяет подобрать диффеоморфизм $D''_2$, такой, что $G \circ f \circ \pi \circ D''_2 = f'$. Далее из условия регулярности кривой самопересечения $\Delta$ подбирается диффеоморфизм $D_1$ с требуемыми свойствами. Теорема доказана.

**Следствие 5.2.** *Подпространство $Q$ $\pi$-устойчивых отображений открыто и всюду плотно в пространстве $IMM^\circ$.*

**Замечание**

Кривая $\pi(\Delta)$ погружена в плоскость, это следствие условия В. Действительно, если $x \in \Delta$ является критической точкой проекции $\pi$, то оба прообраза $x_1, x_2 \in M$ этой точки на параметризующей поверхности являются особыми точками отображения $\pi \circ \varphi$. Тем самым, кривая самопересечения $\Delta$ и кривая особенностей проекции $\Sigma$ пересекаются в точке $x$ не в общем положении, а кривая $\Sigma$ самопересекается в $\mathbb{R}^3$. Верно и обратное утверждение: если точка $x \in f(M)$ лежит на пересечении двух ветвей кривой $\Sigma$, то кривая самопересечения (с точностью до величин второго порядка малости) получена пересечением двух плоскостей, перпендикулярных плоскости проекции. Таким образом, в точке $x$ кривая $\Delta$ имеет вертикальную касательную, а ее проекция $\pi(\Delta)$ имеет особенность.

Пользуясь Теоремой 1, мы дадим описание $\pi$-устойчивых погружений в терминах диаграмм $I$-структуры. Кривые $\Delta$ и $\Sigma$ на погруженной поверхности $f(M)$ находятся в общем положении. Проекции $\pi(\Delta)$ и $\pi(\Sigma)$ рассматриваемых кривых на плоскость, согласно условию С, образуют пару стратифицированных особых кривых. Особенности пары этих кривых перечислены ниже.

a. $\pi(\Delta_3)$.

b. $\pi(\Sigma^{1,1})$.

c. $\pi(Q)$.

d. $\pi(\Sigma) \cap \pi(\Delta)$.

e. точки самопересечения $\pi(\Delta)$.

f. точки самопересечения $\pi(\Sigma)$.

В дальнейшем для сокращения обозначений будем писать $\pi\Delta_3$ (и т. д.), а точки самопересечения соответствующих стратов полиэдра при проекции будем обозначать через $\pi\Delta \odot \pi\Sigma$, $\pi\Delta \odot \pi\Delta$, (и т. д.).

**Определение 5.3.** $I$-структурой погруженной поверхности называется пара кривых на плоскости с особенностями a-f.

$I$-структуру удобно изображать в виде следующей диаграммы, представляющей 1-полиэдр $K$, ребра и вершины которого соответствуют особенностям a-f, перечисленным выше.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(M^2) & \supset & \Sigma^1 & \supset & \Sigma^{1,1} \\ \cup & & \cup & & \\ \Delta_2 & \supset & Q & & \\ \cup & & & & \\ \Delta_3 & & & & \end{array} \tag{11}$$

В этой диаграмме $\Sigma^{1,1} \subset \Sigma^1$ - стратифицированная кривая сборки с точками складки, $\Delta_3 \subset \Delta_2$- стратифицированная кривая кратных точек погружения $\varphi$, $Q = \Sigma^1 \cap \Delta_2$. Проекция $\pi(K)$ полиэдра $I$-структуры на плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет изолированные особенности, перечисленные ниже.

$\pi\Sigma \odot \pi\Sigma$ - точка самопересечения кривой $\pi\Sigma^1$.

$\pi\Sigma \odot \pi\Delta_2$ - точка пересечения двух ветвей кривых $\pi\Sigma^1$ и $\pi\Delta_2$, которая не получается проектированием никакой особенности на погруженной поверхности, а образуется на плоскости при проекции.

$\pi\Delta \odot \pi\Delta$ - точки самопересечения кривой $\pi\Delta_2$.

Перейдем к рассмотрению отношения кобордизма на пространстве $\pi$-устойчивых погружений поверхностей. Нас будет интересовать, перестройки $I$-структур, которые возникают при кобордизмах погруженных поверхностей. Изучать погруженное многообразие $F : (N^3, M_0 \cup M_1) \to (\mathbb{R}^3 \times I, \mathbb{R}^3 \times (\{1\} \cup \{2\}))$, задающее кобордизм двух погруженных поверхностей $f_1(M_1)$ и $f_2(M_2)$, удобно представлять себе однопараметрическое семейство погруженных поверхностей (с особенностями, соответствующими морсовским перестройкам). Перестройки $I$-структур в однопараметрических семействах приведены в следующем списке. При этом особенности a-i образуются на погруженной поверхности, а особенности j- образуются в результате пересечения и самопересечения погруженных стратифицированных кривых $\pi(\Delta)$ и $\pi(\Sigma)$ на плоскости.

a. Перестройки кривой самопересечения погруженной поверхности, которые делятся на два типа.

a1. Исчезновение (появление) компоненты кривой самопересечения.

a2. Перестройка кривой самопересечения: разделение (слияние) двух компонент $\Delta$ и перестройка не приводящая к изменению числа компонент связности $\Delta$. Во втором случае перестройка происходит без сохранения ориентации (при любом ее выборе) на $\Delta$.

b. Перестройка погруженной поверхности, связанная с наличием четырехкратной точки $\Delta_4$ самопересечения.

c. Появление (исчезновение) пары точек особенности сборки $\Sigma^{1,1}$ совпадающей коориентации. Вблизи этой особенности, называемой "ласточкин хвост"и обозначаемой через $\Sigma^{1,1,1}$, однопараметрическое семейство погружений может быть записано в декартовых координатах $(x, y, z, t)$, где $t$- координата деформации, а проекция происходит вдоль координаты $z$ по формулам: $f(x, y, t) = (t, x, y, ty \pm xy^2 + y^4)$. Рисунок $t$-деформации семейства $(x, z)$-сечений поверхности в окрестности критической точки перестройки приводится ниже.

d. Появление (исчезновение) пары точек сборки различной коориентации. Различают два типа перестройки:

d1. Появление на кривой $\Sigma$ компоненты связности.

d2. Перестройка кривой $\Sigma$ путем слияния (разделения) двух компонент. При каждой такой перестройке число компонент кривой $\Sigma$ изменяется. Это связано с тем, что плоская кривая $\pi(\Sigma)$ коориентирована.

e. Пересечение листа погруженной поверхности, содержащего точку сборки проекции со вторым (регулярным) листом поверхности. Особенность будет обозначаться через $S$.

f. Трансверсальное пересечение двух вервей кривой $\Sigma$ в пространстве и появление (исчезновение) точки самопересечения на кривой $\pi\Delta$. Особенность будет обозначаться через $R$.

Остановимся на изучении этой особенности более подробно. Поясним, почему при пересечении двух ветвей кривой $\Sigma$ в пространстве на проекции $\pi\Delta$ появляется (исчезает) точка самопересечения. В критический момент времени рассмотрим точки $x_1$ и $x_2$ на поверхности, образующие особенность. Обозначим через $U_1$, $U_2$ их малые окрестности (на поверхности). Обозначим через $\xi$ – поле вертикальных направлений в окрестности $U_1$, соответствующих градиенту функции $\pi \circ f$ в римановой метрике на поверхности, индуцированной из метрики $\mathbb{R}^3$. В критический момент времени ветвь $\bar{\Delta}_1$ кривой $\bar{\Delta}$, расположенная в окрестности $U_1$, имеет в точке $x_1$ касательную, параллельную полю $\xi$. Сама точка касания имеет в локальных координатах на $U_1$ вид параболы $y = x^2$, поле $\xi$ параллельно прямым $y = const$, а ветвь $\Sigma_1$ кривой $\Sigma$ задана уравнением $x = 0$. При изменении параметра деформации кривая $\Sigma_1(t)$ (или, что эквивалентно, кривая $\Delta_1(t)$) перемещается вдоль поля направлений. При этом касательная к кривой $\Delta_1(t)$ в точке $x_1(t) = \Sigma_1(t) \cap \Delta_1(t)$ меняет свою горизонтальную составляющую (эквивалентно, составляющую вдоль оси $x = 0$, перпендикулярной оси поля направлений) на противоположную. Это означает, что на кривой $\pi\Delta$ появляется (исчезает) точка самопересечения в окрестности $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. В этой особой точке происходит также пересечение двух особенностей типа $Q(t)$.

g. Касание кривых $\Delta$ и $\Sigma$ на погруженной поверхности.

h. Кривая $\Sigma$ содержит точку $\Delta_3$ Особенность будет обозначаться через $T$.

i. Морсовская перестройка погруженной поверхности. Различают две перестройки в соответствии с индексом ручки кобордизма:

i1. Появление (исчезновение) малой сферы.

i2. Слияние (разделение) двух листов поверхности в окрестности конической особенности.

Перечислим особенности $I$-структуры, связанные с пересечением стратифицированных кривых $\pi\Delta$ и $\pi\Sigma$ при проекции.

j. Точка $\pi\Sigma^{1,1}$ лежит на регулярной ветви кривой $\pi\Sigma$.

k. Точка $\pi\Sigma^{1,1}$ лежит на кривой $\pi\Delta$.

l. Точка $\pi\Delta_3$ лежит на кривой $\pi\Sigma$.

m. Точка $\pi\Delta_3$ лежит на регулярной ветви кривой $\pi\Delta$.

n. Точка $\pi Q$ лежит на регулярной ветви кривой $\pi\Delta$.

o. Точка $\pi Q$ лежит на регулярной ветви кривой $\pi\Sigma$.

p. Точка пересечения кривой $\pi\Delta$ с точкой самопересечения кривой $\pi\Sigma$.

r. Точка пересечения кривой $\pi\Sigma$ с точкой самопересечения кривой $\pi\Delta$.

s. Точка касания двух ветвей кривой $\pi\Delta$

t. Точка касания двух ветвей кривой $\pi\Sigma$

u. Точка касания кривых $\pi\Delta$ и $\pi\Sigma$.

Теперь предложим другое описание особенностей $I$-структуры, не прибегая напрямую к списку a-u, а используя понятие устойчивости. Мы ограничимся (для упрощения обозначений) случаем погружения $f : N^3 \to \mathbb{R}^4$ замкнутого многообразия. Пусть $\rho \oplus \pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^3$ – ортогональные проекции. Рассматриваются устойчивые погружения относительно проекции $\pi$, которые для краткости называются $\pi$-устойчивыми.

Погружение $F : N^3 \to \mathbb{R}^4$ является $\pi$-устойчивым, тогда и только тогда, когда особенности самопересечения и критические точки проекции $\pi$ образуют 2-полиэдр $K$ (полиэдр $I$-структуры, изображенный на следующей диаграмме (описание стратов полиэдра $K$ приводится после формулировки теоремы), причем проекция $\pi K$ полиэдра $K$ в пространство $\mathbb{R}^3$ самопересекается трансверсально.

$$\begin{array}{ccccccc}
\psi(M^3) & \supset & \Sigma^1 & \supset & \Sigma^{1,1} & \supset & \Sigma^{1,1,1} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\Delta_2 & \supset & Q & \supset & S & & \\
\cup & & \cup & \nwarrow & & & \\
\Delta_3 & \supset & T & & R & & \\
\cup & & & & & & \\
\Delta_4 & & & & & &
\end{array} \tag{12}$$

Типы стратов полиэдра $K$ соответствуют особенностям a-i, перечисленным ниже. Подробнее, $\Sigma^{1,1,1} \subset \Sigma^{1,1} \subset \Sigma^{1}$ - стратифицированная поверхность сборки, содержащая кривые складки и изолированные особенности типа "ласточкин хвост", $\Delta_4 \subset \Delta_3 \subset \Delta_2$ стратифицированная поверхность кратных точек погружения $\psi$, причем точки кратности 3 образуют кривые $\Delta_3$, вдоль которых поверхность $\Delta_2$ самопересекается с кратностью 3, точки $\Delta_4$ кратности 4 образуют конечное множество, причем в окрестности каждой точки пересекаются 6 листов поверхности $\Delta_2$ и 4 ветви кривой $\Delta_3$. Поверхности $\Sigma^1$ и $\Delta_2$ на многообразии $\psi(N^3)$ пересекаются вдоль кривой $Q$. Конечное множество особенностей типа $T$ состоит из точек пересечения кривой $\Delta_3$ и поверхности $\Sigma^1$ на погруженном многообразии $\psi(M^3)$. Аналогично, конечное множество $S$ образовано пересечением кривой $\Sigma^{1,1}$ и поверхности $\Delta_2$. Конечное множество особенностей типа $R$ образовано в результате самопересечения поверхности $\psi(\Sigma^{1,1})$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. Другим способом особые точки типа $R$ могут быть определены как критические точки проекции $\pi : \Delta_2 \to \mathbb{R}^3$. Особенности, определенные диаграммой (12), образуют двумерный полиэдр специального вида, причем проекция этого полиэдра в $\mathbb{R}^3$ имеет особенности самопересечения общего положения, соответствующие особенностям k-v.

Перейдем к рассмотрению пространства $Map(M^2;\mathbb{R}^3)$ отображений $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$, где $M^2$ – произвольная (вообще говоря, неориентируемая) замкнутая поверхность, $MAP^o(2,1)$ определено как объединение пространств для всех различных $M^2$. Определено включение $IMM^o(2,1) \subset MAP^o(2;1)$. Определим подпространство $Q_U \subset MAP^o(2;1)$, аналогичное подпространству $Q \subset IMM^o$, состоящее из устойчивых отображений $g : M^2 \to \mathbb{R}^3$ относительно ортогональной проекции $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Подпространство $\pi$-устойчивых отображений включено в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Q_U & \subset & MAP^o(2;1) \\ \cup & & \cup \\ Q & \subset & IMM^o. \end{array} \tag{13}$$

Диаграмма 1-полиэдра $K_u$, определяющего особенности $I$-структуры произвольного отображения изображена ниже.

$$
\begin{array}{ccccc}
\varphi(M^2) & \supset & \Sigma^1 & \supset & \Sigma^{1,1} \\
\cup & & \cup & & \\
\Delta_2 & \supset & \{Q;U\} & & \\
\cup & & & & \\
\Delta_3 & & & &
\end{array}
\tag{14}
$$

В этой диаграмме $U$ – конечное множество, образованное проекциями устойчивых критических точек типа "зонтик Уитни"отображения $g$, в остальном диаграмма аналогична диаграмме для погружений.

Пространство $\pi$–устойчивых отображений $G : N^3 \to \mathbb{R}^4$ характеризуетя следующим 2-полиэдром $I$–структуры, который обобщает полиэдр (12) на случай устойчивых отображений (погружений с особенностями):

$$
\begin{array}{ccccccc}
\psi(M^3) & \supset & \Sigma^1 & \supset & \Sigma^{1,1} & \supset & \Sigma^{1,1,1} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\Delta_2 & \supset & \{Q;U\} & \supset & \{S;U\odot\Sigma^{1,1}\} & & \\
\cup & & \cup & \nwarrow & & & \\
\Delta_3 & \supset & \{T;U\odot\Delta_3\} & & R & & \\
\cup & & & & & & \\
\Delta_4. & & & & & &
\end{array}
\tag{15}
$$

В этой диаграмме $U$ – проекция кривой особенностей отображения $G$, состоящая из однопараметрического семейства особенностей типа "зонтик Уитни"; $U \odot \Sigma^{1,1}$, $U \odot \Delta_3$ – конечное множество особых точек, определяемых как пересечение кривой зонтиков $U$ с соответствующими особенностями диаграммы $I$-структуры погружений.

К особенностям a-u добавляются следующие

v. Рождение или гибель пары "зонтиков". Эта особенность соответствует критическим точкам функции $\rho$ проекции на ось времени.

w. Особенность $U \odot \Sigma^{1,1}$: "зонтик", двигаясь вдоль кривой складки, пересекает точку сборки.

x. Особенность $U \odot \Delta_3$: регулярный лист поверхности, двигаясь в пространстве, "прокалывается"зонтиком.

К двум оставшимся разновидностям относятся все особенности, полученные при проекции полиэдров $I$-структуры из однопараметрического семейства на плоскость, связанные с "зонтиками", а именно:

y. $z_1$ Проекция "зонтика"лежит на кривой $\pi(\Delta_2)$.

z. $z_2$ Проекция "зонтика"лежит на второй ветви кривой $\pi(\Delta_2)$.

## Определение

В пространстве $MAP^{o}(2;1)$ определим подпространство **D** коразмерности 1 (дискриминант) как пространство всех отображений, имеющих вырожденные особенности $I$-структуры. Открытое всюду плотное подпространство пространства $D$ особых отображений образовано отображениями с вырожденными особенностями $a - z$.

Пусть $G : IMM^{o}(2;1) \to \mathbb{Z}/8$ –гомоморфизм, классифицирующий регулярные классы кобордизма погружений. Рассмотрим этот гомоморфизм на подпространстве $Q$ погружений с регулярными проекциями. Мы продолжим этот гомоморфизм на подпространство $Q_U$ всех отображений с регулярными проекциями. При этом гомоморфизм $\kappa$ оказывается инвариантом Васильева первого порядка относительно дискриминанта $D$. Пользуясь теоремой о классификации особенностей $I$-структуры можно придумать много примеров инвариантов первого порядка. Это построение остается читателю.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы исследовать особенности $I$-структуры погруженной поверхности и найти инвариантные функции этих особенностей при регулярной гомотопии и при кобордизмах. Для этого определим следующие числовые характеристики особенностей.

Нам понадобится ввести ориентацию на кривой складки $\Sigma^1$. Ориентируем эту кривую так, что при обходе поверхность проектируется справа по направлению движения. Целое число $\sigma \in \mathbb{Z}$ определено как алгебраическое число особенностей типа $\Sigma^{1,1}$, $\sigma = ord(\Sigma^{1,1}_{+}) - ord(\Sigma^{1,1}_{-})$. При этом знак особенности сборки положителен, если вектор ориентации на кривой складки, содержащей точку сборки, направлен вверх по направлению оси проекции; отрицателен, если вниз.

$q \in \mathbb{Z}$. Определим целое $q = \sum_i \pm x_i$, где особенности $x_i$ разновидности $\pi Q_+$ (т.е. такие особенности, для которых вектор ориентации к кривой складки пересекает участок поверхности, не содержащей кривую $\Sigma$ с тыльной стороны на внешнюю по отношению к направлению проектирования) суммируются с положительными, а особенности разновидности $\pi Q_-$ с отрицательными знаками.

$\sigma\sigma \in \mathbb{Z}$ определим, как алгебраическое число особенностей типа $\pi\Sigma\Sigma$, $\sigma\sigma = ord(\pi\Sigma\Sigma_+) - ord(\pi\Sigma\Sigma_-)$. Знак особенности выбирается в соответствии со стандартным правилом: это знак упорядоченного репера на плоскости, составленного из касательных векторов к ветвям кривой складки, которые упорядочены в соответствии со значением координаты вдоль оси проекции.

$\delta\delta$ определяется как натуральное число особенностей типа $\pi\Delta\Delta$, в дальнейшем нас будет интересовать лишь четность этого числа.

**Теорема 5.4.** *На пространстве $MAP^o(2;1)$ определены дискриминанты $D_G \subset MAP^o(2;1)$, $D_\beta \subset MAP^o(2;1)$ и локально постоянная функция (нулевой коцикл) $G : MAP^o(2;1) \setminus D_G \to \mathbb{Z}/8$ являющееся инвариантом Васильева первого порядка, причем выполнены следующие свойства.*

*1. Если отображение $\varphi$ является погружением из подпространства $IMM^o(2;1) \setminus D_G$, то его класс кобордизма в группе $Imm^o(2,1) = \mathbb{Z}/8$ определяется особенностями $I$-структуры по формуле*

$$G(\varphi) = \sigma(\varphi) - 2\sigma\sigma(\varphi) + 4\delta\delta(\varphi) \qquad (mod 8). \tag{16}$$

*2. Инвариант $G$ меняется лишь на коориентированном страте особенностей, образованного перестройками $I$-структуры типа $w$, $z$.*

### Доказательство Теоремы

По построению значения $G, \beta$ заданы линейными функциями и являются инвариантами первого порядка. Докажем, что выражение $G(\varphi)$ является инвариантом регулярной гомотопии и кобордизма. Пусть $\phi_i : M_i \to \mathbb{R}^3; \quad i = 1,2$ погружение, $\psi : N^3 \to \mathbb{R}^3 \times I$ - кобордизм, связывающий погружения $\varphi_1$, $\varphi_2$ такой, что $\partial N^3 = M_1 \cup M^2$; $\psi|M_1 = \varphi_1$; $\psi|M_2 = \varphi_2$. Особенности $I$-структуры погружений $\varphi_1$, $\varphi_2$ связаны кобордизмом особенностей $I$-структуры погружения $\psi$. Это означает, что полиэдры вида (14) особенностей $I$-структуры погружений $\varphi_1$, $\varphi_2$ ограничивают двумерный полиэдр особенностей $I$-структуры погружения $\psi$, заданный диаграммой вида (15). Рассмотрим список изолированных особых точек $I$-структуры погружения $\psi$, примыкающих к особой кривой $\pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$:

$$\pi R, \qquad \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1, \qquad \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1 \odot \pi\Delta_2, \qquad \pi Q \odot \pi\Sigma^1.$$

Следующий список составляют изолированные особенности, содержащие в малой своей окрестности особые кривые $\pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2$:

$$\pi T, \qquad \pi R, \qquad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2, \qquad \pi\Delta_2 \odot \pi\Delta_2 \odot \pi\Sigma^1, \qquad \pi Q \odot \pi\Delta_2.$$

Следующий список составляют изолированные особенности, содержащие в малой своей окрестности кривые $\pi Q$.

$$\pi T, \qquad \pi R, \qquad \pi S, \qquad \pi Q \odot \pi\Sigma^1, \qquad \pi Q \odot \pi\Delta_2.$$

Выражение $G$, и каждое слагаемое $\sigma$, $\sigma\sigma$ и $\delta\delta$ определяет одномерные коцепи на 1-остове полиэдра $I$-структуры. Проверка инвариантности выражения $G$ при кобордизмах состоит в том, что мы доказываем, что коцикл $G$ является коцепью по модулю 8. Аналогичное утверждение ранее использовалось в [B1].

Среди перечисленных особенностей имеются три, в окрестности которых коцепь $G$ имеет особенность, связанную с примыканием 1-ребер с носителем $G$ различных типов, а именно:

$$\pi\Sigma^{1,1,1}, \qquad \pi R, \qquad \pi\Sigma^{1,1} \odot \pi\Sigma^1.$$

Рассмотрим каждую особенность по отдельности.

К особой точке $\pi\Sigma^{1,1,1}$ примыкают два ребра $\alpha$, $\alpha'$ особенности $\pi\Sigma^{1,1}$ и одно ребро $\gamma \subset \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Справедливо тождество:

$$\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha') + \sigma\sigma(\gamma) = 0,$$

где слагаемые выражения обозначают значения коцепей на соответствующих 1-симплексах.

К особенности $\pi R$ примыкают две пары вертикальных ребер $\pi\Sigma^{1,1}$, обозначаемых через $(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2})$, $(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2})$ и ребро $\varepsilon \in \pi\Delta\Delta$. Справедливо равенство:

$$\sigma(\alpha_{1,1}) + \sigma(\alpha_{2,1}) + \delta\delta(\varepsilon) = \sigma(\alpha_{1,2}) + \sigma(\alpha_{2,2}).$$

К особенности $\pi\Sigma^{1,1} \odot \Sigma^1$ примыкает пара вертикальных ребер $\alpha_1$, $\alpha_2$ типа $\pi\Sigma^{1,1}$ и пара ребер $\gamma$, $\gamma' \in \pi\Sigma^1 \odot \pi\Sigma^1$. Справедливы равенства:

$$\delta\delta(\gamma) + \delta\delta(\gamma') = 0, \qquad \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2).$$

Проведенные вычисления доказывают, что $G(\varphi_1) = G(\varphi_2)$, если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ лежат в одном классе кобордизма группы $Imm^o(2,1)$. Вычисляя значения $G$ для поверхности Боя имеем $G(\varphi) = \pm 1 (mod 8)$, для погружения Константинова $\varphi : T^2 \to \mathbb{R}^3$ имеем $G(\varphi) = 4 \pmod 8$ (см. ниже задачу 1). Формула (i) доказана.

Исследование особенностей $v - z$ показывает, что значение $G$ может изменится лишь при перестройках $x$ (на число $\pm 2$) и при перестройке $z_2$ (на 4). Теорема доказана, если решить задачу 1.

## Задачи

1. Вычислить значения величин, в формуле (16) для поверхности Боя, Морена, Милнора, Константинова, Понтрягина.

2. Существует ли погружение $\varphi : M \to \mathbb{R}^3$, проектирующееся на плоскость без сборок и нечетным числом точек трансверсального самопересечения на кривой складки? Вычислить группу кобордизмов таких погружений. Рассмотреть аналогичную задачу для погружений ориентированных поверхностей и доказать, что в этом случае группа кобордизма изоморфна $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, а ее образующими служат торы Понтрягина и Константинова.)

3. Исследовать особенность примыкания стратов дискриминанта $x$ и $z_2$ в коразмерности 2. Существует ли инвариант второго порядка, обобщающий инвариант $G$, связанный с теми же стратами?

4. Доказать, что эйлерова характеристика поверхности, отображенной на плоскость в общем положении, вычисляется как индекс Уитни (полуцелый) ориентированной кривой складки.

## 5.2 Преобразование Лежандра сферической функции. Контактная структура на многообразии

Контактной структурой на многообразии $M^{2m+1}$ называется 1-форма $\alpha$, $\alpha \in T^*(M)$, удовлетворяющая максимальному услоию неинтегрируемости. А именно, 2-форма $d\alpha \in \Lambda^2(T^*(M))$ не вырождается в каждой гиперплоскости $\alpha = 0$. Это условие можно записать в виде формулы

$$\alpha \wedge (d\alpha)^m \neq 0, \tag{17}$$

где равенство понимается в каждой точке многообразия. Условие (17) не вполне зависит от выбора формы $\alpha$ и определяется распределением поля гиперплоскостей $\alpha = 0$ в $T^*(M)$. Приведем примеры контактных структур.

### Пример

Пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_m; z)$ имеет контактную структуру заданную формой $\alpha = dz - \sum_{i=1}^m y_i dx_i$. Действительно, $d\alpha = dx \wedge dy$ и форма $\alpha \wedge (d\alpha)^m$ совпадает с формой объема на $\mathbb{R}^{2m+1}$.

### Замечание

При $m = 1$ предыдущий локальный пример можно глобализовать следующим образом. Пусть $h : S^3 \to S^2$ – расслоение Хопфа, $\alpha \in T^*(S^3)$– форма, значение $\alpha(\xi)$ на касательном векторе $\xi \in T_m(S^3)$ определяется длиной ортогональной в стандартной метрике на $S^3$ проекции $\xi_h \in T_m(S^1) \subset T_m(S^3)$ на слой расслоения $h$, проходящий через точку $m \in M$. Форма $d\alpha$ в этом случае равна форме $h^*(\omega)$, где $\omega \in T^2(S^2)$ – стандартная форма объема на $S^2$.

### Основной пример контактной структуры

Пусть $V$ – гладкое замкнутое $m$-многообразие (нас будет прежде всего интересовать случай $V = S^2$). Обозначим через $J^1(V;\mathbb{R})$ – многообразие 1-струй гладких функций на $V$. Это многообразие размерности $2m+1$ имеет естественную контактную структуру. Пусть $x_1, \dots, x_m$ – система локальных координат в окрестности точки $a \in V$ и $z$ – координата на $\mathbb{R}$. Пусть в заданой системе координат $y_1, \dots, y_n$ – базисные ковектора из $T^*(J^1)$. Тогда контактная форма $\alpha \in T^*(J^1)$ в окрестности $a$ задана формулой

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^{m} y_i dx_i.$$

Контактную структуру можно также определить в инвариантных терминах.

Пусть $f : V \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, имеющая в точке $m$ 1-струю $j_m(f)$. Тогда контактная гиперплоскость в $T(J^1)$, приложенная в точке $(m, j_m(f))$ определяется как касательное пространство к подмногообразию ростков 1-струй всевозможных функций, с заданным значением $1-$ в точке $x \in V$.

### Пример

Многообразие контактных элементов. Пусть $V^m$– гладкое многообразие. Контактным элементом на $V$ называется гиперплоскость в касательном пространстве $T(V)$. Множество всех контактных элементов на $B$ образует многообразие размерности $2m-1$, оно обозначается через $PT^*(V)$. На этом многообразии задана естественная контактная структура, которая в инвариантных терминах описывается так. Скорость двжения контактного элемента (т.е. касательный вектор к многообразию $T(PT^*(V))$ принадлежит гиперплоскости формы $\alpha$, если скорость движения точки приложения лежит в самом контактном элементе. Нас будет интересовать случай $V = \mathbb{R}^3$.

### Лежандровы подмногообразия

Пусть $(M^{2m+1}, \alpha)$ – многообразие с контактной структурой. Подмногообразие $N^n \subset M$ называется интегральным, если его касательная плоскость принадлежит контактной плоскости формы $\alpha$. Подмногообразие $N^n$ называется лежандровым, если $n = m$. Заметим, что никакое подмногообразие $N'^{n+1} \subset M$ уже не является интегральным, поскольку локальное условие (1) для формы $\alpha$ является условием максимальной неинтегрируемости. Рассмотрим примеры лежандровых подмногообразий для примеров контактных структур 1-3.

### Примеры Лежандровых подмногообразий

–1. Плоскость $x_1 = const, z = const$ в стандартном контактном пространстве $\mathbb{R}^{2m+1}$.

–2. График любой функции $f : V^m \to \mathbb{R}$, рассматриваемый как подмножество ($m$-мерное подмногообразие пространства $J^1(V)$) является лежандровым подмногообразием.

–3. Множество всех контактных элементов, касающихся данной гиперповерхности многообразия $B$ является лежандровым подмногообразием пространства проективного касательного расслоения $PT^*B$.

Следующая пример доставляет локальное описание произвольного лежандрова подмногообразия $N \subset M$ при соответствующем выборе системы локальных координат $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots y_m, z$ на многообразии $M$.

### Пример

Пусть $(\mathbb{R}^{2m+1}, \alpha)$ – многообразие с контактной структурой из примера 1.1. Пусть $\{v_1, \ldots v_m\}$ – гиперпространство размерности $m$, проходящая через точку $a_0 \in \mathbb{R}^{2m+1}$, с координатами $v_i = x_i$ или $y_j$ (на котором форма $\alpha$ обращается в 0). Обозначим через $w_1, \ldots, w_m$ – дополнительную гиперплоскость с координатами $w_i = y_i$ или $x_j$. Тогда всякий росток лежандрового подмногообразия $N \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ задается одной из $2^m$

производящих функций $S(v_1, \ldots, v_m)$ по формулам

$$w_i = \frac{\partial S}{\partial v_i}, \quad z = -S(v_i) + \sum_i < x_i; y_i > \delta(i), \tag{18}$$

где $\delta(i) = 1$, если $v_i = x_i$ и $\delta(i) = 0$, если $v_i = y_i$.

### Лежандровы расслоения

Пусть $\pi : M^{2m+1} \to B^{m+1}$ – гладкое локально-тривиальное расслоение. Расслоение $\pi$ называется лежандровым, если многообразие $M$ снабжено контактной структурой, а слои – лежандровы подмногообразия. Рассмотрим примеры лежандровых расслоений.

### Примеры лежандровых расслоений

–1. Пусть $(\mathbb{R}^{2m+1}, \alpha)$ – евклидово пространство с контактной структурой из примера 1.1. Расслоение $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$ является лежандровым.

–2. Пусть $\pi : J^1(V, \mathbb{R}) \to J^0(V, \mathbb{R}) = V \times \mathbb{R}$ – отображение забывания производных.

–3. Пусть $\pi : PT^*B \to B$ – проекция многообразия контактных элементов на многообразие. Это расслоение называют проективным кокасательным расслоением. В случае $V = \mathbb{R}^m$, многообразие контактных элементов можно расслоить по-другому над многообразием гиперплоскостей в $\mathbb{R}^m$, диффеоморфному сфере $S^{m-1}$. Расслоение $\pi' : PT^*\mathbb{R}^m \to S^{m-1}$ сопоставляет контактному элементу, содержащую его гиперплоскость.

### Лежандровы эквивалентности

Лежандровой эквивалентностью двух лежандровых расслоений называется диффеоморфизм пространств расслоения, переводящий слои первого расслоения в слои второго.

### Пример

Рассмотрим проективное кокасательное расслоение $\pi : PT^*B \to B$. Пусть $F : B \to B$ – произвольный диффеоморфизм базы, тогда индуцированное отображения многообразия контактных элементов в себя $F_* : PT^*B \to PT^*B$ является лежандровой эквивалентностью.

### Лежандровы отображения и фронты

Аналогом понятия погружения $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ является понятие лежандрового отображения, образ которого называется фронтом. Пусть $\pi : M \to B$ – лежандрово расслоение, $i : L \subset M$ – лежандрово подмногообразие. Сужение отображения $\pi$ на подмногообразие $i(L)$, т.е. отображение $\pi \circ i : L \to B$ называется лежандровым отображением.

### Пример

Рассмотрим стандартное расслоение $\pi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, построенное в примере 1. Пусть $S(y_1, \dots, y_m)$ – производящая функция ростка лежандрового многообразия $x = \frac{\partial S}{\partial y}$, $z = S(y_1, \dots, y_i)$ в точке $a_0 \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Здесь выражение (2) упрощается, поскольку $\delta(i) = 0$ при всех $i$. Проекция $\pi(x, y, z) = (x, z)$ задает лежандрово расслоение этого многообразия. В случае, когда функция $S$ – выпукла, образ является ростком гладкой гиперповерхности в точке $\pi(a_0)$, заданной в виде $z = T(x)$. Функция $T$ при этом называется преобразованием Лежандра исходной функции $S$. В общем случае фронт лежандрового отображения имеет особенности, которые в интересующем нас случае $m = 2$, $S(y_1, y_2, t)$, где $t$- вещественный параметр, полностью изучены.

### Пример

Отображение, сопоставляющее каждой точке гиперповерхности в $\mathbb{R}^m$ касательную гиперплоскость в этой точке является лежандровым.

**Определение 5.5.** Эквивалентностью двух лежандровых отображений называется лежандрова эквивалентность соответствующих лежандровых расслоений, переводящее первое лежандрово подмногообразие во второе. Пример 1 лежандрова отображения является универсальным; росток любого лежандрова отображения эквивалентен ростку из этого примера, при соответствующем выборе ростка лежандровой эквивалентности расслоений.

### Особенности лежандровых отображений и их однопараметрических деформаций

Для исследования особенностей устойчивых лежандровых фронтов и их перестроек во времени используют теоремы о классификации особенностей производящих функций. Нас будут интересовать особенности двумерного фронта и его однопараметрических деформаций. Классификация ростков критических функций $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ рассматривают с точностью до прибавления квадратичной невырожденной формы от конечного числа переменных. Предполагают, что эквивалентные ростки могут отличаться на гладкую замену координат в прообразе.

Классификация особенностей функций вместе с изображениями особенностей двумерных фронтов приведена на следующем рисунке.

A1. $f(x) = \pm x^2$ Регулярная точка фронта.

A2. $f(x) = \pm x^3$ Ребро возврата.

A4. $f(x) = \pm x^4$ Ласточкин хвост.

Перестройки волновых фронтов в 1-параметрических семействах классифицируются следующими особенностями функций.

A4. $f(x) = \pm x^4$ исчезновение или появление пары ласточкиных хвостов.

A5. Бабочка. $f(x) = \pm x^5$.

$D_4^+$. Кошелек. $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

$D_4^-$. Пирамида. $f(x, y) = x^2 y - y^3$.

Каждый из перечисленных ростков встречается неустранимым образом в 3-параметрическом семействе функций. Семейства универсальных деформаций этих ростков аналогичны деформациям диаграмм Серфа в теории псевдоизотопий. Перестройки фронтов соответствуют однопараметрическим семействам деформаций двупараметрических ростков.

## 5.3 Сферические функции и их преобразования Лежандра

Сферической функцией (сферической гармоникой) порядка $l = 0, 1, \dots$ называется произвольный однородный гармонический полином степени $l$, рассматриваемый на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^3$. Сферическая гармоника $Y$ порядка $l$ является собственной функцией оператора Бельтрами

$$-\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}) - \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

и соответствуют собственному значению $\lambda = l(l+1)$ кратности $2l + 1$. Известно, что пространство гармоник порядка $l$ образует конечное векторное пространство размерности $2l + 1$. кроме того, подпространства сферических гармоник данного порядка образует ортогональное разложение гильбертова пространства квадратично суммируемых функций на $S$.

Гармоника с $l = 0$ представляется постоянной функцией. Гармоники порядка $l = 1$ образуют трехмерное пространство. Каждая такая гармоника представляется значением ортогональной проекции сферы $S$ на выбранную ось и называется диполем. Гармоники порядка 2 образуют 5-мерное векторное пространство. Оно называется пространством квадруполей. В сферической системе координат $(r, \theta, \phi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ сфера $S$ задается уравнением $r = 1$, а для представления сферических гармоник используют специальные функции, называемые полиномами и присоединенными полиномами Лежандра. Диполи при таком представлении записываются по формулам

$$Y_1^0 = cos(\theta); \qquad Y_1^{-1} = sin\theta cos\phi; \qquad Y_1^1 = sin\theta sin\phi.$$

Мы применим преобразование Лежандра к сферическим гармоникам в нижеследующем построении и изучим свойства этого преобразования для дипольных составляющих сферических гармоник.

Пусть $(s, u, y)$– координаты в $J^1(S^2;\mathbb{R})$, $s \in S^2$; $u \in T_s^*(S^2)$; $y \in \mathbb{R}$. Построим отображение $G : J^1(S^2;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ по формуле $G(s; u, y) = y\vec{s} + \vec{u}$. По-другому, если $f : S \to \mathbb{R}$ – гладкая функция на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса, параметризованная вектором $\vec{s}$ единичной длины, определим $G(f) = f(\vec{s})\vec{s} + grad_s f$, где $grad_s f$ – вектор градиента, параллельный $T_s(S)$. Легко видеть, что построенный пример является глобализацией примера 5.1 и функция $f$ выступает как производящая функция в локальных координатах. Фронт произвольной сферической функции $f$ представляет собой поверхность, особенности которой описаны в п.6. Если функция $f = f(t)$ меняется во времени, то фронт лежандрового отображения $G(f(t))$ имеет особенности, включенные в однопараметрическое семейство. Если функция $f$ в некоторой точке $s_0 \in S$ задана условиями $f(s_0) = 0; gradf(s_0) = 0; \frac{d^2 f(s_0)}{ds^2} = 0$, то условия регулярности лежандрового фронта нарушаются. Функции с такими условиями не встречаются в однопараметрических семействах общего положения.

**Теорема 5.6.** *Пусть $f$ представлени в виде $f = f_0 + f_1$, где $f_0$ – дипольная компонента функции $f$, $f_0 = aY_1^0 + bY_1^{-1} + cY_1^1$ и $f_1$ ортогональна пространству дипольных гармоник. Тогда лежандровы фронты $G(f)$ и $G(f_1)$ отличаются параллельным переносом на вектор $(a, b, c)$. Здесь первая координата вектора берется вдоль оси сферической системы координат в ее положительном направлении, вторая координата берется вдоль оси направленной в точку с координатами $(r = 1, \phi = 0, \theta = \pi)$, третья координата измеряется вдоль оси направленной в точку с координатами $(r = 1, \varphi = \pi, \theta = \pi)$.*

**Доказательство**

Лежандров фронт $G(h)$ функции $h = h_1 + h_2$ получается в результате поточечной суммы фронтов $G(h_1) + G(h_2)$. Таким образом, достаточно проверить, что фронт дипольной гармоники $G(f_0)$ представляется точкой с координатами $\{a, b, c\}$. Это достигается прямым вычислением для базисных дипольных гармоник и выполнено по соображениям линейности для произвольной дипольной гармоники.

**Теорема Максвелла о квадруполях**

Пространство сферических гармоник порядка $l$ допускает альтернативное описание в инвариантных терминах, которое было предложено Дж. К. Максвеллом. Пусть $f = r^{-1}$ – гармоническая функция с особенностью в начале координат. Пусть выбраны $k$ постоянных векторных полей в прстранстве и пусть $Y_k$ получена в результате взятия поворной частной производной $k$-ого порядка от функции $f$ вдоль векторных полей. Функция $Y_k$ рассматривается как функция на $S$. Сформулируем теорему Максвелла. Выбранные векторные поля удобно представлять осями, проходящими через начало координат. Они называются осями мультиполя.

**Теорема 5.7.** *Функции $Y_k$ и только они являются сферическими гармониками порядка $k$. Более того, рассмотренные $k$ векторных поля определяют функцию $Y_k$ однозначно с точностью до знака, если допустить изменение направления векторов некоторых полей на противоположное и перестановку их порядка.*

Рассмотрим применение теоремы Максвелла для описания пространства квадрупольных гармоник, т.е. для $k = 2$. Согласно этой теореме моделью для пространства квадрупольных гармоник (нормы 1) служит пространство $X$ неупорядоченных наборов пар точек на $S^2$, в котором введено дополнительное отношение эквивалентности. Допускается одновременное изменение направлений обеих осей на противоположное. Построенную инволюцию обозначим через $T$. Мы покажем, что пространство $X$ является проективным пространством $\mathbb{C}P(2)$, тогда в силу теоремы Максвелла определено факторотображение $\mathbb{C}P(2) \to \mathbb{C}P(2)/T$ и более того, пространство $\mathbb{C}P(2)/T$ естественно отождествляется с единичной сферой в пятимерном пространстве квадрупольных гармоник.

Пространство $\mathbb{C}P(2)$ определяется как многообразие комплексных прямых в комплексном трехмерном векторном пространстве. По любой неупорядоченной паре точек $x_1; x_2$, лежащих на комплексной римановой сфере $\mathbb{C} \cup \infty$ строится однородный многочлен $P$ второй степени от переменной $z$ по формуле $P(z) = z^2 + bz + c = (z - x_1)(z - x_2)$. Тройка коэффициентов $1; b; c$ определяет комплексную гиперплоскость $L(b; c) = z_1 + bz_2 + cz_3$. Случай бесконечных $b$, $c$ также допускается, что приводит к гиперплоскости содержащей комплексную прямую $z_1$. По любой гиперплоскости $L(b; c)$ корни уравнения $P(z)$ восстанавливаются однозначно по теореме Виета, что доказывает, что отображение $\{x_1; x_2\} \to L(b; c)$ имеет обратное, что доказывает гомеоморфность $X = \mathbb{C}P(2)$.

**Задачи**

–1. Построить лежандровы графики квадруполей.

## 5.4 Пространство псевдоизотопий. Теорема Серфа, пример В.И.Арнольда

Пусть $M^m$– гладкое замкнутое $m$-мерное многообразие. Псевдоизотопией многообразия $M$ называется диффеоморфизм $h : M \times I \to M \times I$ (здесь и далее через $I$ обозначим экземпляр отрезка $[0; 1]$) такой, что $h|_{M \times \{0\}} = Id$, и в малой окрестности $M \times (\{0\} \cup \{1\})$ $h$ коммутирует с проекцией $p : M \times I \to I$. Изотопию $g : M \times I \to M \times I$ можно охарактеризовать как псевдоизотопию, коммутирующую с проекцией $p$. Пространство псевдоизотопий обозначим через $C$.

Пусть $F$–пространство всех функций $f : M \times I \to I$, совпадающих в малой окрестности $\partial(M \times I)$, размеры которой не фиксируются и зависят от $f$ с проекцией $p$. Обозначим через $H \subset F$ – подпространство функций без критических значений. Определено отображение $\pi : C \to H$ по формуле $F \to \pi \circ F$. Слоем отображения $F$, $F_0 = \pi^{-1}(p)$, является пространство изотопий многообразия $M$.

Заметим, что пространство $F_0$ стягиваемо, поскольку это пространство определено как пространство путей пространства $Diff(M)$ с началом в отмеченной точке $Id : M \to M$. Следовательно, $\pi$ является гомотопической эквивалентностью. С другой стороны, пространство $F$ – стягиваемо и мы имеем $\pi_i(F; p) = \pi_i(H; p) = \pi_{i+1}(F, H; p)$. Гомотопическая группа $\pi_1(F, H; p)$ описывает, тем самым, компоненты связности пространства $C$. Множество $\pi_1(F, H; p)$ наделено структурой (абелевой) группы, которая согласована с групповой структурой на $\mathbb{C}$, определяемой как композиция псевдоизотопий.

Описание элементов из $\pi_i(F,H;p)$, $i = 1,2$ дается при помощи диаграмм Серфа, причем отношению гомотопности $i+1$-мерных относительных сфероидов, представляющих данную гомотопическую группу, соответствует отношение кобордизма диаграмм. Диаграммой Серфа семейства функций $f_\lambda$ на многообразии $M \times [0;1]$, $\lambda \in [0;1]^k$ в предположении, что $f|_{M\times\partial([0;1])^k}$ не имеет критических точек, называется гиперповерхность с особенностями в $[0;1]^k \times [0;1]$, состоящая из всевозможных пар точек $(\lambda, x)$, где $x-$ одно из критических значений функции $f_\lambda$. В частности, диаграмма Серфа представлят кривую с особенностями при $i=1$ (или поверхность с особенностями при $i=2$), в пространстве значений $+$ параметров.

Для описания диаграмм Серфа и их кобордизмов требуется рассмотреть классификацию устойчивых ростков критических точек функций в $i$-параметрических семействах общего положения. Классификация ростков проводится с точностью до прибавления квадратичной формы $x_1^2 + \dots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \dots - x_k^2$.

1-параметрическое семейство.

$f(x,t) = (t, \pm x^2)$ $\qquad A_1$.

$f(x,t) = (t, tx + x^3)$ $\qquad A_2$.

2-параметрическое семейство.

$f(t_1,t_2,x) = (t_1, t_2, \pm(t_1 x + t_2 x^2 + x_4))$ $\qquad A_3$.

3-параметрическое семейство.

$f(t_1,t_2,t_3,x) = (t_1 x + t_2 x^3 + t_3 x^3 + x^5)$ $\qquad A_4$.

$f(t_1,t_2,t_3,x,y) = x^3 + y^3 + t_1 xy + t_2 x - t_3 y$ $\qquad D_{4,-}$.

$f(t_1,t_2,t_3,x,y) = x^3 + 3xy^2 + t_1(x^2+y^2) - t_2 x - t_3 y$ $\qquad D_{4,+}$.

Предположим, что на многообразии $M \times I$ задана риманова метрика, для которой будут выполнены все условия типа общего положения. Пусть $f : M \times I \to I$ – функция из $F$, у которой все критические точки являются морсовскими. Интегральные траектории векторного поля $gradf$, исходящие из критических точек, называются устойчивыми сепаратрисами, входящие в критические точки называются неустойчивыми. Диаграмма Серфа для такой функции – это нульмерное подмногообразие критических значений (с указанием их индексов) на отрезке значений $I$. Сепаратрисные траектории, соединяющие критические точки разных индексов $(i+1,i)$ образуют одномерный граф с вершинами в критических точках. Если дополнительно предположить, что у функции все критические точки имеют индексы либо $i$, либо $i+1$, $m \geq i \geq 1$, то по этому графу восстанавливается обратимая матрица $M$, задающая дифференциал в двучленном цепном комплексе, построенном по функции $f$.

Рассмотрим диаграмму Серфа для однопараметрического семейства функций. Пусть $f(x,t)$, $t \in I_t = [0;1]$, $x \in M \times I$, $x \in M \times I$, 1-параметрическое семейство функций из $F$, представляющее элемент из $\pi_1(F,H;p)$, т.е. $f(x,0) = p$; $f(x,1) \in H$. Множество критических значений $f(x,t)$, рассматриваемое в пространстве значений+параметров $I_y \times I_t$, представляет собой кривую складки $\Sigma^1$ с некоторым числом особых точек сборки $\Sigma^{1,1}$. Отрезки кривой $\Sigma^1$ вне этих особых сборок классифицируются индексом критических точек. В сборке $\Sigma^{1,1}$ происходит слияние (рождение) двух морсовских критических точек на кривой складки соседних индексов. Точки сборки поэтому принято также называть точками типа "рождения-гибели".

Используя лемму Смейла с параметром (подробнее см. [H-W]), добиваются того, что в семействе $f(x,t)$ находятся лишь точки соседних двух индексов $3 \geq i, i+1 \geq m-2$. Более того, дополнительной деформацией диаграммы Серфа добиваются того, чтобы все критические значения индекса $i+1$ лежали бы на интервале $]\frac{1}{2};1[$, а значения индекса $i$ лежали бы на интервале $]0;\frac{1}{2}[$.

Сепаратрисные траектории, соединяющие точки разных индексов, образуют 2-полиэдр, который мы будем называть полиэдром Володина, ассоциированным с диаграммой Серфа. Гранями ассоциированного полиэдра Володина служат сепаратрисы, соединяющие точки разного индекса. Одномерные ребра этого графа делятся на два типа. Во-первых отрезки морсовских точек, во-вторых особенности типа "прибавления ручек", образованные в результате трансверсального пересечения стабильного сепаратрисного диска критической точки индекса $i$ $(i+1)$ с нестабильным, восстановленом из другой критической точки того же индекса. Наконец, вершинами полиэдра служат точки пересечения ребер разных типов, а также точки типа сборки.

При деформации семейства $f(x,t)$ по дополнительному параметру $\tau$, неподвижной при $t = 0$ и лежащей в пространстве $H$ при $t = 1$, диаграмма Серфа меняется при помощи кобордизма. Вычислив группу кобордизма ассоциированных полиэдров Володина удается, тем самым, вычислить и саму группу псевдоизотопий многообразия $M$. В частности, если $\pi_1(M) = 0$ ($\pi_2(M)$ может быть произвольной), а $dim(M) \geq 5$, то $C(M)$ связно. Это теорема Серфа.

При изучении группы $\pi_1(C(M))$ изучают диаграммы Серфа двупараметрических семейств функций, которые представляют собой поверхности с особенностями, погруженные в пространство значений+параметров $I_t \times I_\tau$. Особенности типа $\Sigma^{1,1,1}$ представляют нульмерный цикл, который ограничивает кривую самопересечения диаграммы Серфа. Особенности этого типа убивают перестройкой вдоль ручек индекса 1. Используя двупараметрический аналог леммы Смейла, добиваются, чтобы в двупараметрическом семействе присутствовали лишь точки двух соседних индексов $i+1, i$. Для этого заведомо достаточно предположить, что $3 \geq i \geq i+1 \geq m-2$, $m \geq 5$.

Полиэдр Володина трехмерен. В дополнении к перечисленным выше типам особенностей, которые теперь образуют клетки на единицу большей размерности, добавляются одномерные ребра, образованные особенностями типа "обмена" сепаратрисных траекторий и особенностями типа коммутирования двух особенностей прибавления ручек, которые отвечают за соотношения в группе Стейнберга. Особенности типа "обмена" образованы пересечением стабильных сепаратрис индекса $i$ с нестабильными индекса $i+1$. По соображениям размерности, такие особенности встречаются неустранимым образом в двупараметрических семействах. Эти особенности препятствуют упорядочиванию критических значений в соответствии с их индексом.

Геометрические свойства диаграмм Серфа 2-параметрических семейств в полном объеме до сих пор не изучена. Автору не известно как по полиэдру Володина указать элемент из $K_3(\mathbb{Z}[\pi])$ и каков список локальных особенностей перестроек диаграмм двупараметрических семейств, приводящих к изменению этого элемента в подгруппе $Ker : K_3(\mathbb{Z}[\pi]) \to Wh_3(\pi)$.

Вычисление групп кобордизма диаграмм Серфа полезно проводить, ограничивая полный список локальных особенностей, рассматривая лишь диаграммы семейств функций с особенностями данного типа. Такие функциональные семейства называют семействами функций с умеренными особенностями. Рассмотрим простейший пример вычисления гомотопической группы пространства функций с умеренными особенностями, открытый В.И.Арнольдом.

Пусть $M = pt$, тогда $M \times I = I$. Рассматривается пространство $P \subset F$ в пространстве функций функций $f : I \to I$, имеющих лишь локальные особенности типа $A_1$ (морсовская особенность) и $A_2$ особенность типа "рождения-гибели". Вычислим $\pi_1(P)$. Многообразие критических точек семейства $f_t$, определяющего элемент из $\pi_1(P)$ представляет 1-подмногообразие в пространстве $I \times I$, где вторая координата соответствует параметру $t$. Это одномерное подмногообразие $S \subset I^2$ проектируется на вторую координату вдоль первой посредством проекции $\pi : I^2 \to I$, при этом точкам типа рождения-гибели семейства $f_t$ соответствуют особенности типа складка проекции $\pi$. При кобордизме кривая $\Sigma$ изменяется кобордизмом в классе вложенных кривых.

При кобордизме не возникает точек перигиба вдоль направления проекции $\pi$, поскольку такие точки соответствовали бы особенностям типа $A_3$, семейства $f_t$, а такие особенности запрещены. Кривая $S$ может перестраиваться морсовским способом, при этом появляются или уничтожаются две точки складки проекции $\pi$. Эта перестройка соответствует слиянию или разъединению пары точек "рождения-гибели"в семействе $f_t$. Группа кобордизма кривых в квадрате без вертикальных точек перегиба изоморфна группе целых чисел по сложению.

**Задачи**

– 1. Вычислить группу $\pi_3(P)$ пространства функций на отрезке без особенностей типа $A_3$ и более сложных. Построить при вычислении соответствующую группу кобордизма (группу кобордизма вложенных поверхностей в кубе без особенностей типа сборка при проекции на одну из граней куба) и вычислить эту группу.

–2. Построить графики диаграмм Серфа в окрестности 2-параметрического семейства функций общего положения, которое определяет универсальную деформацию особенностей $A_3$, $D_{3,+}$, $D_{3,-}$ ростков функций.