1. Теорема Стоуна–Вейерштрасса

Топологические пространства: "Словарик"

Определение 1.1. Пусть X — множество, а $\mathcal{T}$ — совокупность подмножеств X, обладающая следующими совойствами:

1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

2) $V_1, \ldots, V_K \in \mathcal{T} \Rightarrow V_1 \cap \ldots \cap V_K \in \mathcal{T}$;

3) $V_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in \mathcal{A}, \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тогда говорят, что $\mathcal{T}$ задает *топологию* на X, а пара $(X, \mathcal{T})$ суть *топологическое пространство*.

Определение 1.2. Пусть Y — подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. *Индуцированной топологией* на Y называется топология $\mathcal{T}|_Y := \{V \cap Y\colon\ V \in \mathcal{T}\}$.

Определение 1.3. Скажем, что некоторое семейство $\mathcal{B}_x$ окрестностей точки x образует *базу окрестностей* x, если $\forall\, V \in \mathcal{T}$, $x \in V$, найдется $U \in \mathcal{B}_x$: $U \subseteq V$.

Базой топологии называется подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, такое, что $\forall\, V \in \mathcal{T}$: $V = \bigcup_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathcal{S}$. Множество $\mathcal{S}_0$ — *предбаза* $\mathcal{T}$, если $\{V_1 \cap \ldots \cap V_K\colon\ V_k \in \mathcal{S}_0\}$ — база топологии $\mathcal{T}$.

Определение 1.4. Говорят, что пространство $(X, \mathcal{T})$ *хаусдорфово*, если для любых точек $x \neq y$ найдутся $U_x, U_y \in \mathcal{T}$, такие, что $x \in U_x$, $y \in U_y$, $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Определение 1.5. Отображение $f\colon\ X \to Y$ называется *непрерывным*, если $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ для любого $U \in \mathcal{T}_Y$. Взаимно-однозначное непрерывное отображение $f\colon\ X \to Y$, обратное к которому также непрерывно, называется *гомеоморфизмом*.

Упражнение 1.6. Отображение называется *открытым*, если переводит открытые множества в открытые. Проверьте, что непрерывное отображение f — гомеоморфизм $\iff$ f — биекция и f открыто. (см. комментарии к лекции)

Компактные топологические пространства

Определение 1.7. Пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Следующие несколько лемм читателю предлагается доказать в качестве упражнений.

Лемма 1.8. *Если X компактно, а $F \subset X$ замкнуто, то F компактно. (см. комментарии к лекции)*

Лемма 1.9. *Если X хаусдорфово, а $K \subset X$ компактно, то K замкнуто. (см. комментарии к лекции)*

Лемма 1.10. *Если $K \subset X$ компактно, а отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, то $f(K)$ также компактно. (см. комментарии к лекции)*

Лемма 1.11. *Пусть X компактно, а Y хаусдорфово. Тогда любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ открыто. Если к тому же f — биекция, то f — гомеоморфизм. (см. комментарии к лекции)*

Лемма 1.12. *Пусть на пространстве X заданы две топологии $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, относительно которых X хаусдорфово и компактно. Тогда $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. (см. комментарии к лекции)*

Теорема Стоуна–Вейерштрасса

Пусть X — компакт, и пусть $C(X)$ (соотв. $C_{\mathbb{R}}(X)$) обозначает пространство комплексных (соотв. вещественных) непрерывных функций на X. Пространство $C(X)$ снабжается нормой

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|, \tag{1.1}$$

а значит, и топологией, задаваемой базой открытых множеств $U_{h,\varepsilon} := \{f\colon \ \|f - h\| < \varepsilon\}$.

Линейное подпространство A в $C(X)$ называется *подалгеброй*, если A замкнуто относительно операции поточечного умножения функций.

Будем говорить, что A *разделяет точки*, если для любых $x \neq y$ найдется $f \in A$ такая, что $f(x) \neq f(y)$.

Теорема 1.13 (Стоуна–Вейерштрасса). *Пусть $A = \overline{A}$ — замкнутая подалгебра в $C(X)$, разделяющая точки. Тогда*

(1) либо $A = C(X)$;

(2) либо $A = N_{x_0} := \{f \in C(X)\colon \ f(x_0) = 0\}$.

Сначала мы докажем вещественную форму этой теоремы.

Лемма 1.14. *Непрерывная вещественная функция φ на $[-m, m]$ может быть равномерно приближена вещественным полиномом с любой точностью.*

Лемма 1.15. *Пусть $\varphi(t) = |t|$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется $P_0(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_r t^r$, такой, что $\|\varphi - P_0\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Действительно, по лемме существует $P(t) = c + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_r t^r$ со свойством $\|\varphi - P\| < \varepsilon$, но $|c| = ||0| - P(0)| < \varepsilon$. Значит, полагая $P_0 := P - c$, имеем $\|\varphi - P\| < 2\varepsilon$. ●

Лемма 1.16. *Предположим, что разделяющая точки замкнутая алгебра A непрерывных функций обладает следующим дополнительным свойством: $\forall\, x \in X$ существует $f \in A$, $f(x) \neq 0$. Тогда для любых a, b и $x \neq y$ найдется $\phi_{x,y}^{a,b} \in A$:*

$$\phi_{x,y}^{a,b}(x) = a, \quad \phi_{x,y}^{a,b}(y) = b. \tag{1.2}$$

Доказательство. Существуют $g, h \in A$, такие, что $g(x) \neq g(y)$ и $h(x) \neq 0$. Положим

$$f := \begin{cases} g & \text{при } g(x) \neq 0, \\ h & \text{при } g(x) = 0,\ h(x) \neq h(y), \\ g + h & \text{при } g(x) = 0,\ h(x) = h(y), \end{cases} \tag{1.3}$$

и пусть

$$u_x(\xi) := \begin{cases} f(\xi), & \text{если } f(y) = 0, \\ \dfrac{f(\xi)}{f(y)} - \left(\dfrac{f(\xi)}{f(y)}\right)^2 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда $u_x(x) = 1$ и $u_x(y) = 0$. Аналогично строится u_2. Искомая функция $\phi_{x,y}^{a,b} := au_x + bu_y$. •

Лемма 1.17. *Замкнутая подалгебра A в $C_{\mathbb{R}}(X)$ образует решетку.*

Доказательство. В самом деле, очевидно, что

$$f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \tag{1.5}$$

а функция $|f-g|$ по лемме может быть приближена полиномами без свободного члена от $f - g$, следовательно, $|f - g| \in A \Rightarrow f \vee g \in A$. Наконец, $f \wedge g = -((-f) \vee (-g))$. •

Говорят, что множество $\mathcal{L} \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ образует *решетку*, если для всяких $f, g \in \mathcal{L}$ минимум $f \wedge g$ и максимум $f \vee g$ принадлежат $\mathcal{L}$,

$$(f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \tag{1.6}$$
$$(f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\}. \tag{1.7}$$

Лемма 1.18. *Пусть $\mathcal{L}$ — замкнутое подпространство в $C_{\mathbb{R}}(X)$, являющееся решеткой. И пусть $\mathcal{L}$ содержит функции $\phi_{x,y}^{a,b}$, как в лемме . Тогда $\mathcal{L} = C_{\mathbb{R}}(X)$.*

Доказательство. Пусть h — произвольная функция из $C_{\mathbb{R}}(X)$ и $\varepsilon > 0$.

Сначала покажем, что для любого $x \in X$ существует функция $f_x \in \mathcal{L}$, удовлетворяющая условиям: $f_x(x) = h(x)$ и $f_x(\xi) \geq h(\xi) - \varepsilon$, $\xi \in X$. Для этого по каждой точке y найдем окрестность $V_{x,y}$ точки y, такую, что $\phi_{x,y}^{h(x),h(y)}(\xi) \geq h(\xi) - \varepsilon$, $\xi \in V_{x,y}$. Множества $V_{x,y}$ образуют покрытие X из которого выберем конечное подпокрытие V_{x,y_j}. Тогда функция $f_x := \bigvee_j \phi_{x,y_j}^{h(x),h(y_j)}$ ичкомая.

Теперь, используя аналогичную технику, построим равномерное ε-приближение для h. А именно, для каждой точки x рассмотрим ее окрестность W_x, в которой $f_x(\xi) \leq h(\xi) + \varepsilon$. Такая окрестность существует, поскольку функция $f_x - h$ непрерывна и $f_x(x) = h(x)$. Тогда, выбирая конечное подпокрытие $W_1, \ldots, W_K$, определяем $f := f_{x_1} \vee \ldots \vee f_{x_K}$.

Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f \in \mathcal{L} \quad \|f - h\| \leq \varepsilon$. Значит, в силу замкнутости $\mathcal{L}$, $h \in \mathcal{L}$. •

Доказательство теоремы для $C_{\mathbb{R}}(X)$. а) Предположим, что A удовлетворяет условиям леммы . Тогда из и следует, что $A = C_{\mathbb{R}}(X)$.

б) Если же все функции из A обращаются в 0 в одной точке $x_0 \in X$, то такая точка единственна (A разделяет точки) и $\mathbb{C} + A$ удовлетворяет условиям теоремы и предположению а) $\Rightarrow\ \mathbb{C} + A = C_{\mathbb{R}}(X) \ \Rightarrow\ A = \{f \in C_{\mathbb{R}}(X)\colon\ f(x_0) = 0\}$. •

Определение 1.19. Говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ слабее топологии $\mathcal{T}_2$, если $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ как множество.

Нетрудно проверить, что множество всех топологий на X образует решетку относительно этого отношения.

Пусть $\Psi = \{\psi\}$ — некоторое множество функций $\psi\colon\ X \to \mathbb{C}$.

Определение 1.20. *Слабой топологией* на X, заданной семейством Ψ, называется слабейшая из топологий на X, в которой все функции ψ непрерывны. Иными словами, это топология, определяемая предбазой $\{U_{\psi,a,\varepsilon}\colon\ \psi \in \Psi,\ a \in \mathbb{C},\ \varepsilon > 0\}$, где

$$U_{\psi,a,\varepsilon} := \{x\colon\ |\psi(x) - a| < \varepsilon\}. \tag{1.8}$$

В качестве иллюстрации использования понятия слабой топологии рассмотрим важную для дальнейшего конструкцию тихоновского произведения пространств.

Пусть $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ — топологические пространства. Рассмотрим декартово произведение

$$X = \prod_\alpha X_\alpha = \big\{x = (x_\alpha)\colon\ x_\alpha \in X_\alpha\big\}. \tag{1.9}$$

Пусть $\pi_\alpha\colon\ X \to X_\alpha\colon\ x \mapsto x_\alpha$ — естественные проекции.

Определение 1.21. *Тихоновским произведением* семейства топологических пространств $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ называется пространство X, наделенное слабой топологией, отвечающей множеству отображений $\{\pi_\alpha\}$.

Теорема 1.22. *Если пространства $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ компактны, то и их тихоновское произведение также компактно.*

Комментарии к упражнениям из Лекции 1

$\lhd$. Поскольку f — биекция, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, значит, f^{-1} непрерывно $\Rightarrow$ f — гомеоморфизм.

$\lhd$. Пусть $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие F, тогда $V_\alpha = U_\alpha \cap F$, $U_\alpha \in \mathcal{T}_X$. Так как X компактно, из покрытия $\{U_\alpha\} \sqcup \{X \setminus F\}$ можно выбрать конечное подпокрытие вида $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_K}, X \setminus F\}$. Тогда V_{α_k} — искомое конечное подпокрытие.

$\lhd$. Покажем, что $X \setminus K$ открыто. Пусть $x \in X \setminus K$. Для каждой точки $y \in K$ найдутся непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек y и x соответственно. Семейство множеств U_y суть покрытие K из которого можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{y_k}\}$, тогда, очевидно, $\bigcap_k V_k \cap K = \varnothing$. Значит, $X \setminus K$ открыто.

$\lhd$. Если $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества $f(K)$, то $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ — открытое покрытие K. Остается воспользоваться определением компактности.

$\lhd$. Отображение f открыто, потому что любое замкнутое подножество X компактно, следовательно, переходит под действием f в компактное $\Rightarrow$ замкнутое подмножество Y.

$\triangleleft$. Рассмотрим отображение $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)\colon x \mapsto x$. Оно непрерывно, так как $(X, \mathcal{T}_2) \geq (X, \mathcal{T}_1)$, и в то же время (по предыдущей лемме) открыто, значит, должно являться гомеоморфизмом $\Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.