2. Банаховы алгебры. Спектр

Определение 2.1. Говорят, что алгебра A — , если существует $e \in A$, такой, что $\forall x \in A \quad ex = xe = x$.

Определение 2.2. Пусть A — алгебра, не имеющая единичного элемента. Рассмотрим пространство A', являющееся прямой суммой $\mathbb{C}$ и A, наделенное следующей операцией умножения:

$$(\alpha e + x)(\beta e + y) = \alpha\beta e + (\alpha y + \beta x + xy), \tag{2.10}$$

где e — элемент $(1, 0) \in \mathbb{C} \oplus A$. Эта конструкция называется *присоединением единицы* к алгебре A.

Определение 2.3. Говорят, что алгебра A — *нормированная алгебра*, если A суть нормированное пространство, причем $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ и $\|e\| = 1$ (если A — алгебра с единицей).

Упражнение 2.4. В топологии, задаваемой нормой, операция умножения $(x, y) \mapsto xy$ непрерывна.

Определение 2.5. Если A — нормированная алгебра с нормой $\| \cdot \|$, то соответствующая норма в A' определяется соотношением $\|\alpha e + x\| = |\alpha| + \|x\|$.

Определение 2.6. Нормированная алгебра A называется *полной* или *банаховой*, если A полна как нормированное пространство.

Идеалы. Факторизация

Определение 2.7. (*Левым*) *идеалом* в алгебре A называется собственная подалгебра $I \subset A$ со свойством $AI \subseteq I$. Аналогично определяются *правые* и *двусторонние* идеалы.

Лемма 2.8. *Каждый левый идеал I в алгебре с единицей A содержится в некотором максимальном левом идеале.*

Доказательство. По лемме Цорна I содержится в некоторой максимальной подалгебре M такой, что $(AM \subseteq M$ и $e \notin M)$, но в силу определения M — идеал. •

Пусть E — нормированное пространство, а L — его замкнутое подпространство. Напомним, что фактор-пространством E/L называется линейное пространство смежных классов $x + L$, снабженное нормой

$$\|x + L\| := \inf_{y \in L} \|x + y\|. \tag{2.11}$$

Упражнение 2.9. Проверьте корректность определения нормы в E/L и докажите, что если E — банахово пространство, а L замкнуто, то E/L также банахово.

Утверждение 2.10. *Пусть I — замкнутый двусторонний идеал в банаховой алгебре A, тогда факторалгебра A/I также является банаховой относительно естественной нормы.*

Доказательство [?]Наймарк. Полнота алгебры A/I следует из замкнутости I. Нужно проверить лишь то, что $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$. $x, y \in A/I$ и $\|\overline{e}\| = 1$ для единичного элемента в A/I. Действительно, поскольку

$$\|x\| = \inf_{\xi \in x} \|\xi\|, \qquad \|y\| = \inf_{\eta \in x} \|\eta|, \tag{2.12}$$

для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\xi_0 \in x$ и $\eta_0 \in y$, такие, что

$$\|\xi_0\| < \|x\| + \varepsilon, \qquad \|\xi_0\| < \|x\| + \varepsilon, \tag{2.13}$$

откуда

$$\|xy\| = \inf_{\zeta \in I} \|\xi_0\eta_0 + \zeta\| \le \|\xi\eta\| \le \|\xi\|\,\|\eta\| < (\|x\| + \varepsilon)(\|y\| + \varepsilon). \tag{2.14}$$

В силу произвольности ε имеем $\|xy\| \le \|x\|\,\|y\|$.

Далее, $\|\overline{e}\| = \inf_{\zeta \in I} \|e + \zeta$. Поскольку все элементы ξ со свойством $\|e - \xi\| < 1$ обратимы $\Longrightarrow$ $\xi \notin I$, имеем $\|e + \zeta\| = \|e - (-\zeta)\| \ge 1$. Таким образом, $\|\overline{e}\| = 1$.

Спектр элемента алгебры

Утверждение 2.11. *Пусть A — банахова алгебра с единицей. Тогда существует окрестность единицы со следующими свойствами:*[1]

1) каждый элемент из U_0 обратим;

2)с функция $x \mapsto x^{-1}$ непрерывна в точке e.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x = e - y \in U_0$. Тогда обратный к x элемент может быть представлен как сумма ряда

$$e + y + y^2 + y^3 + \ldots = (e - y)^{-1}. \tag{2.15}$$

Очевидно, умножение этого ряда на $e + y$ в классе формальных степенных рядов дает e, поэтому достаточно проверить сходимость данного ряда. В самом деле, ряд является абсолютно сходящимся, так как $\|y^n\| \le \|y\|^n$, а $\|y\| < 1$, а значит, он сходится и в алгебре A в силу ее полноты.

Докажем непрерывность функции x^{-1} в точке e. Из полученного представления x^{-1} следует, что $\|x^{-1} - e\| \le \|y\|\,\|x^{-1}\|$, где $y = x - e$. Кроме того, $\|x^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n = (1 - \|y\|)^{-1}$, откуда $\|x^{-1} - e\| = O(\|y\|)$ при $\|y\| \to 0$. •

Определение 2.12. *Спектром* элемента $x \in A$ называется множество $\mathrm{Sp}(x)$ точек $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что $\lambda e - x$ необратим. Точки $\lambda \notin \mathrm{Sp}(x)$ называются *регулярными точками* элемента x, а функцию $x_\lambda = (\lambda e - x)^{-1}$ на этом множестве — *резольвентой* x.

Лемма 2.13. $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| \le \|x\|\}$.

[1] В таких случаях говорят, что A — *алгебра с непрерывным обратным*

Доказательство. Предположим, $|\lambda| > \|x\|$, тогда $x/\lambda \in U_0$ (см. 2.11) $\Rightarrow$ элемент x/λ обратим, и $(x - \lambda e)^{-1} = \lambda^{-1}(x/\lambda - e)^{-1})$. •

Определение 2.14. Спектральным радиусом элемента называется величина

$$\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}. \tag{2.16}$$

Лемма 2.15. *Пусть P — полином, тогда $P(\mathrm{Sp}(x)) \subseteq \mathrm{Sp}(P(x))$.*

Доказательство. Заметим, что $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ является корнем полинома $P(z) - P(\lambda)$. Таким образом, если $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$, то $P(x) - P(\lambda) = Q(x)(x - \lambda)$ необратим $\Rightarrow$ $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(x))$. •

Упражнение 2.16. Докажите, что в условиях предыдущей леммы $P(\mathrm{Sp}(x)) = \mathrm{Sp}(P(x))$.

Лемма 2.17. $\rho(x) = \sup\{|\lambda|\colon\ \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\}$.

Доказательство. Если $|\lambda| > \|x\|$, то x_λ существует (см. 2.13) и

$$x_\lambda = \lambda^{-1}(e + x + x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n. \tag{2.17}$$

Интегрируя это равенство по окружности $\Gamma_r := \{|\lambda| = r\}$, где $r > \|x\|$, получаем соотношение

$$x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^n x_\lambda \, d\lambda, \qquad n \geq 0, \tag{2.18}$$

из которого следует оценка

$$\|x^n\| \leq r^{n+1} m_x(r), \qquad m_x(r) := \sup_\theta \|x_{re^{i\theta}}\|. \tag{2.19}$$

Пусть R — радиус наименьшего круга с центром в 0, дополнение к которому состоит целиком из регулярных точек. Тогда все сказанное выше справедливо для любого $r > R$, откуда

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \inf\{r > R\} = R. \tag{2.20}$$

С другой стороны, если $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$, то по лемме 2.15 элемент $(\lambda^n e - x^n)$ также необратим, т.е.$\lambda^n \in \mathrm{Sp}(x^n)$ $\Rightarrow$ $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$. Значит, $R^n \leq \|x^n\|$ и, переходя к пределу, $R \leq \rho(x)$. •

Лемма 2.18. $x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1} = -(\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_1} x_{\lambda_2}$.

Доказательство.

$$(x - \lambda_1 e)\, x_{\lambda_2} = \big((x - \lambda_2 e) + (\lambda_2 - \lambda_1)\, e\big)\, x_{\lambda_2} = -e + (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_2} \qquad \big| \cdot x_{\lambda_1}, \tag{2.21}$$

$$x_{\lambda_1}(x - \lambda_1 e)\, x_{\lambda_2} = -x_{\lambda_1} + (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_1} x_{\lambda_2}, \tag{2.22}$$

$$x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_1} x_{\lambda_2}. \tag{2.23}$$

Утверждение 2.19. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, тогда:*

1. *Множество обратимых элементов открыто, а функция $x \mapsto x^{-1}$ непрерывна на нем.*
2. *Замыкание (левого, правого, двустороннего) идеала есть идеал. Максимальный (левый, правый, двусторонний) идеал замкнут.*
3. *Множество регулярных точек элемента x открыто. Резольвента x_λ суть аналитическая функция λ.*
4. $\mathrm{Sp}(x) \neq \varnothing$.

Доказательство. 1. Покажем, что у любого элемента x_0, имеющего обратный x_0^{-1}, существует окрестность U, состоящая целиком из обратимых элементов, причем функция x^{-1} непрерывна в точке x_0. Этот факт имеет чисто топологическое обоснование, аппелирующее к непрерывности алгебраических операций в A. А именно, пусть V — окрестность 0, такая, что при $y \in V$ элемент $e + x_0^{-1}y \in U_0$, а следовательно, обратим. Каждый элемент $x = x_0 + y \in x_0 + V$ также обратим, поскольку $x = x_0(e + x_0^{-1}y)$. При этом для $y \in V$ верно равенство

$$x^{-1} = (e + x_0^{-1}y)^{-1}x_0^{-1}, \tag{2.24}$$

из которого с очевидностью следует непрерывность x^{-1}.

2. Пусть теперь I — левый идеал в A, и пусть S_l — множество элементов алгебры, не имеющих левый обратный, тогда $I \subset S_l$, так как иначе нашлись бы элементы $x \in I$ и $a \in A$, такие что $ax = e$, откуда $I \supseteq Aax = Ae = A$, что является противоречием. В силу замкнутости S_l замыкание $[I] \subset S_l$, значит, $[I] < A$. Таким образом, $[I]$ — идеал.

Рассмотрим максимальный идеал M и предположим, что $[M] > M$, тогда по доказанному $[M]$ — идеал, а это противоречит максимальности M. Итак, пункт 2 установлен.

3. Открытость множества регулярных точек следует из пункта 1. Действительно, из непрерывности x^{-1} и существования $x_{\lambda_0} = (x - \lambda_0 e)^{-1}$ следует обратимость элементов из некоторой окрестности V, содержащей $x - \lambda_0 e$, а значит, и существование x_λ в окрестности λ_0 (непрерывность суперпозиции).

Аналитичность резольвенты следует из непрерывности, а также леммы 2.18:

$$\frac{x_\lambda - x_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = -x_\lambda x_{\lambda_0} \to -x_{\lambda_0}^2, \qquad \text{когда } \lambda \to \lambda_0. \tag{2.25}$$

4. Непустота спектра является следствием классической теоремы Лиувилля, или следующего простого рассуждения.

Если $\mathrm{Sp}(x) = \varnothing$, то все интегралы в (2.9) равны 0, в частности, тот, что отвечает $n = 0 \Rightarrow x = 0$. Но $\mathrm{Sp}(0) = \{0\} \neq \varnothing$. •

Нормированная алгебра называется *телом*, если все элементы A, кроме нулевого, обратимы.

Теорема 2.20 (Гельфанда–Мазура). *Банахова алгебра, являющаяся телом, (естественно) изоморфна $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $x \in A$. Мы знаем, что $\mathrm{Sp}(x)$ содержит хотя бы одну точку λ, но A — тело, тогда $x - \lambda e = 0$, т.е. $x = \lambda e$. Нетрудно проверить, что отображение $x \mapsto \lambda = \lambda(x)$ — гомоморфизм. Далее, если $x \neq 0$, то соответствующее $\lambda(x) \neq 0$, так как иначе $x = 0e = 0$. Итак, λ — искомый изоморфизм. •

Симметрические алгебры

Определение 2.21. Алгебра A называется *симметрической*, если на A задана операция $x \mapsto x^*$ (называемая *инволюцией*), обладающая следующими свойствами:

1) $*$ линейна;

2) $x^{**} = x$;

3) $(xy)^* = y^* x^*$.

Определение 2.22. *Нормированной симметрической алгеброй* называется алгебра с инволюцией, обладающая следующим дополнительным свойством: $\|x^*\| = \|x\|$.

Определение 2.23. Элемент x называется

а) *эрмитовым*, если $x^* = x$;

б) *унитарным*, если $x^* = x^{-1}$;

в) *нормальным*, если $x^* x = x x^*$.

Упражнение 2.24. а) $e^* = e$; б) x^* обратим $\iff$ x обратим.