3. Коммутативные банаховы алгебры

Пространство максимальных идеалов и преобразование Гельфанда

Пусть A — коммутативная и M — некоторый максимальный левый в A, тогда в силу коммутативности A идеал M двусторонний, и можно рассмотреть фактор-алгеру A/M.

Лемма 3.1. *A/M — .*

Доказательство. Предположим противное: элемент $0 \neq x + M$ необратим, и рассмотрим идеал $M' := (A/M)(x+M) \triangleleft A/M$. Тогда $\pi_M^{-1}(M')$ также идеал, но это противоречит максимальности M. •

Таким образом, в силу теоремы каждому максимальному идеалу M соответствуют следующие естественные отображения:

$$\text{изоморфизм} \quad i_M\colon\ A/M \to \mathbb{C}\colon\ x + M \mapsto \lambda, \quad \mathrm{Sp}_{A/M}(x) = \{\lambda\}, \text{ и} \tag{3.26}$$

$$\textit{характер} \quad \psi_M := i_M \circ \pi_M\colon\ A \to \mathbb{C}, \tag{3.27}$$

где π_M — естественная проекция A на A/M. Под *характером* понимается ненулевой гомоморфизм в $\mathbb{C}$. Заметим, полагая $M = \ker\psi$, произвольный характер $\psi\colon\ A \to \mathbb{C}$ можно представить в виде $\psi = \psi_M$.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех максимальных идеалов A.

Определение 3.2. *Преобразованием Гельфанда* называется отображение, сопоставляющее элементу x функцию $\widehat{x}(M) := \psi_M(x)$ на множестве $\mathcal{M}$.

Утверждение 3.3.

1. *Отображение $x \mapsto \widehat{x}$ линейно.*
2. *Если $x = x_1 x_2$, то $\widehat{x}(M) = \widehat{x}_1(M)\,\widehat{x}_2(M)$.*
3. *$\widehat{e}(M) \equiv 1$.*
4. *$\widehat{x}(M) = 0 \iff x \in M$.*
5. *Алгебра $\widehat{A} = \{\widehat{x}\}_{x\in A}$ разделяет точки.*
6. *$\mathrm{Sp}(x) = x(\mathcal{M}) = \{\widehat{x}(M)\colon\ M \in \mathcal{M}\}$.*

Доказательство. Первые три свойства наследуются от ψ_M.

4. Если $x \in M$, то $\pi_M(x) = 0$, и $\widehat{x}(M) = 0$, и наоборот.

Для доказательства *5* достаточно рассмотреть $x \in M_1 \setminus M_2$.

Докажем *6*. Пусть $\lambda = \widehat{x}(M_1)$, тогда $\widehat{(x-\lambda)}(M_1) = 0$, т. е. $x - \lambda \in M_1$, следовательно, $x - \lambda$ необратим $\Rightarrow$ $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$. Обратно, если $x - \lambda$ необратим, то он содержится в некотором максимальном идеале M_1, а значит, $\widehat{x}(M_1) = \lambda$. •

Лемма 3.4. *ψ — характер $\Rightarrow$ $\|\psi\| \le 1$.*

Доказательство. *Первый способ* доказательства состоит в применении рассмотренной выше конструкции пространства максимальных идеалов. А именно, $\psi = \psi_M$ для некоторого M, а гомоморфизм π_M не увеличивает нормы, поскольку $\|\pi_M(x)\| = \inf_{\xi \in M} \|x + \xi\| \le \|x\|$, откуда $|\psi_M(x)| = |i_M(\pi_M(x))| \le \|\pi_M(x)\| \le \|x\|$.

В то же время, лемму можно получить из и пункта *6* предыдущей леммы, так как $\|\widehat{x}\|_\infty = \rho(x) \le \|x\|$. •

Следствие 3.5. $|\widehat{x}(M)| \le \|x\|$.

Доказательство. $|\widehat{x}(M)| = |\psi_M(x)| \le \|\psi_M\| \, \|x\| \le \|x\|$. •

Снабдим $\mathcal{M}$ слабой топологией, отвечающей семейству отображений $\widehat{x}\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$.

Теорема 3.6. *Пространство $\mathcal{M}$ компактно.*

Доказательство. Поскольку отображения ψ_M суть гомоморфизмы и $\|\psi_M\| \le 1$, данный факт является следствием более общей теоремы Банаха–Алаоглу о слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве.

Приведем схему доказательства.

Рассмотрим пространство $X = \prod_M D_{\|x\|}$, где $D_a := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| \le a\}$. По теореме Тихонова оно компактно. Отображение, сопоставляющее элементу $x \in A$ точку $(\psi_M(x))$ в пространстве X, гомеоморфно (проверьте!) отображает $\mathcal{M}$ на некоторое замкнутое (проверьте!), а следовательно, компактное (см.) подмножество X. •

Теорема 3.7. *На $\mathcal{M}$ существует единственная топология, относительно которой $\mathcal{M}$ хаусдорфово и компактно, а отображения $\widehat{x}$ непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_2$ — другая топология, тогда $\mathcal{T}_2 \supset \mathcal{T}$, и по лемме $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$. •

Граница коммутативной банаховой алгебры

Определение 3.8. Говорят, что замкнутое множество $F \subseteq \mathcal{M}$ является *определяющим*, если для любого $x \in A$ найдется точка $M_0 \in F$, в которой $\widehat{x}$ достигает своего максимума: $|x(M_0)| = \max_M |x(M)|$. Минимальное определяющее множество называется *границей алгебры* A.

Теорема 3.9. *Граница существует и единственна.*

Доказательство. Существование границы алгебры устанавливается путем применения леммы Цорна. Проверим единственность.

Лемма 3.10. *Замкнутое множество Γ является границей $\iff$ для любого открытого множества V, пересекающегося с Γ, найдется функция $\widehat{x}$ нормы 1, достигающая максимума в V и удовлетворяющая неравенству $|\widehat{x}(M)| < 1$ на $\Gamma \setminus V$.*

Доказательство. Пусть не так, тогда множество $\Gamma \setminus V$ не пусто и является определяющим, что противоречит минимальности Γ. •

Итак, предположим, что существуют две границы Γ_1 и Γ_2, и рассмотрим точку $M_1 \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$. Поскольку $\mathcal{M}$ хаусдорфово и компактно, существует окрестность V_1 точки M_1, не имеющая общих точек с Γ_2. Рассмотрим элемент x такой, что $\|\widehat{x}\|_\infty = 1$ и $|\widehat{x}(M)| \le c < 1$

на $\Gamma_1 \setminus V_1$. Без ограничения общности можно считать, что окрестность V задается неравенствами $|\widehat{a}_k(M))| < \varepsilon$, $a_k \in A$, тогда $|\widehat{xa_k}(M)| < \varepsilon$ для любого $M \in \Gamma_1$, следовательно, $\|xa_k\| < \varepsilon$. Далее, $\widehat{x}$ достигает максимума в некоторой точке $M_2 \in \Gamma_2$, тогда $|\widehat{a}_k(M_2)| < \varepsilon$, т.е. $M_2 \in V_1$. Противоречие. •

Коммутативные C^*-алгебры

Определение 3.11. Симметрическая A называется *C^*-алгеброй*, если норма в A обладает следующим свойством: $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Лемма 3.12. *В коммутативной C^*-алгебре $\|x^2\| = \|x\|^2$ и $\rho(x) = \|x\|$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $a = x^*xx^*x$. Имеем

$$\|a\| = \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4, \tag{3.28}$$

$$\|a\| = \|x^*x^*xx\| = \|(x^2)^*(x^2)\| = \|x^2\|^2 \quad \Rightarrow \tag{3.29}$$

$$\|x^2\| = \|x\|^2. \tag{3.30}$$

Таким образом, $\|x^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|x\|$, а

$$\rho(x) = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{2^{-k}} = \|x\|. \tag{3.31}$$

Рассмотрим отображение $I\colon\ x \mapsto \widehat{x}$. Мы установили, что I — гомоморфизм. Кроме того, $\|Ix\|_\infty \le \|x\|$, следовательно, I непрерывен.

Лемма 3.13. *I — изометрия.*

Доказательство. $\|Ix\|_\infty = \rho(x) = \|x\|$ (см. , 3.3 и 3.12). •

Слдевствие 3.14. *$\widehat{A}$ замкнута.*

Доказательство. Можно воспользоваться теоремой Банаха об обратном операторе. •

Теорема 3.15 (Гельфанда–Наймарка). *Пусть A — коммутативная и $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов A. Преобразование Гельфанда является изоморфизмом C^*-алгебр A и $C(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Идея доказательства, — применяя теорему Стоуна–Вейерштрасса к алгебре $\widehat{A}$, показать, что $\widehat{A} = C(\mathcal{M})$. После этого нужно будет лишь проверить, что преобразование Гельфанда осуществляет изоморфизм C^*-алгебр, т.е. что $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$.

Для того, чтобы воспользоваться теоремой , нужно доказать, что $\widehat{A}$ является симметрической относительно комплексного сопряжения.

Первый способ. Если M — максимальный идеал, то и M^* — максимальный идеал. В самом деле, $AM^* = (MA)^* = M^*$ (в силу коммутативности), причем $M^* \neq A$, так как иначе $M = M^{**} = A$. Более того, M^* максимален, поскольку в противном случае он содержится в некотором большем идеале, прообраз относительно $*$ — идеал, расширяющий M, что невозможно.

Заметим, что $\widehat{x^*}(M) = \overline{\widehat{x}(M^*)}$. Наша ближайшая цель — доказать, что $M^* = M$ для любой точки границы Γ алгебры A, откуда будет следовать, что $\widehat{x^*}(M) = \overline{\widehat{x}(M)}$ на Γ. Если $M_0^* \neq M_0$ для некоторого $M_0 \in \Gamma$, то, в силу непрерывности отображения $*$ найдется окрестность V точки M, такая что $V \cap V^* = \varnothing$. Существует элемент x такой, что $\|\widehat{x}\|_\infty = 1$ и $|\widehat{x}(M)| \leq c < 1$ вне V. Тогда $|\widehat{x^*}(M)| \leq c < 1$ вне V^* и $\|\widehat{x^*x}\|_\infty \leq c < 1$, что противоречит тождеству $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Итак, рассмотрим ограничение алгебры $\widehat{A}$ на Γ. По теореме $\widehat{A}|_\Gamma = C(\Gamma)$, значит, преобразование $x \mapsto \widehat{x}|_\Gamma$ суть изоморфизм C^*-алгебр. Заметим теперь, что максимальные идеалы алгебры $\widehat{A}|_\Gamma$, а значит, и A параметризуются точками Γ. Таким образом, Γ должно совпадать с $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

Второй способ. Пусть $x^* = x \in A$ и $\psi = \psi_M$ — некоторый характер, и пусть $z = x + ite$, а $\psi(x) = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$. Тогда $\psi(z) = \alpha + i(\beta + t)$ и

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\psi(z)|^2 \leq \|\widehat{z}\|_\infty^2 \leq \|z\|^2 = \|z^*z\| = \|x^2 + t^2 e\| \leq \|x\|^2 + t^2, \tag{3.32}$$

откуда

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|x\|^2 \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}. \tag{3.33}$$

Значит, $\beta = 0$, т.е. $\psi(x) \in \mathbb{R}$, если x эрмитов, и, в частности, $\psi(y^*) = \overline{\psi(y)}$ для всех y. Таким образом, алгебра A симметрична относительно комплексного сопряжения, причем преобразование Гельфанда суть изоморфизм C^*-алгебр. Применяя теорему , завершаем доказательство. •