4. Спектральная теорема для нормальной алгебры в $B(H)$

Гильбертово пространство

Пусть H — линейное пространство.

Определение 4.1. *Скалярным произведением* на H называется положительно определенная полуторалинейная форма $\langle x, y\rangle$, т.е. отображение $H \times H \to \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle, \tag{4.34}$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \tag{4.35}$$

$$\langle x, x\rangle > 0, \quad \text{если } x \neq 0. \tag{4.36}$$

Говорят, что H — *гильбертово пространство*, если H полно относительно нормы $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, заданной скалярным произведением.

Лемма 4.2 (*правило параллелограмма*). $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Упражнение 4.3. Докажите предыдущую лемму.

Лемма 4.4. *Если в банаховом пространстве H имеет место правило параллелограмма, то на H существует скалярное произведение, индуцирующее исходную норму в H:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2}{4}. \tag{4.37}$$

Доказательство. Предполагая, что H — гильбертово пространство, проверим, что построенная в лемме норма совпадает с исходной. В самом деле:

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2 = \\
&\quad = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 + i\|x\|^2 + i\langle x, iy\rangle + i\overline{\langle x, iy\rangle} + i\|y\|^2 - \\
&\quad\quad - \|x\|^2 - \langle x, -y\rangle - \overline{\langle x, -y\rangle} - \|y\|^2 - i\|x\|^2 - i\langle x, -iy\rangle + i\overline{\langle x, -iy\rangle} - i\|y\|^2 = \\
&\quad = \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle} + \langle x, y\rangle - \overline{\langle x, y\rangle} + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \\
&\quad = 4\langle x, y\rangle.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Проверьте, что определенная нами форма действительно полуторалинейная $\Rightarrow$ задает скалярное произведение. •

Лемма 4.5. *Пусть $E \subset H$ — замкнутое выпуклое множество и $y \notin E$, тогда существует единственный элемент $x \in E$, минимизирующий норму $\|x - y\|$.*

Если E — аффинное подпространство, то $y - x \perp E - x$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $y = 0$. Полагая $d = \inf\{\|x\|\colon x \in E\}$, выберем последовательность $x_n \in E$, такую, что $\|x_n\| \to d$. Пусть $\|x_n\| \le d + \varepsilon$ при $n \ge n_0$. Тогда по правилу параллелограмма

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2 = 2\frac{1}{4}\|x_n\|^2 + 2\frac{1}{4}\|x_m\|^2 - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \le \\
\le \frac{1}{2}(d+\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(d+\varepsilon)^2 - d^2 = 2d\varepsilon + \varepsilon^2,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

поскольку $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in E$. Значит, последовательность x_n фундаментальна $\Rightarrow$ имеет предел в H.

Пусть E — подпространство в H, точка $y \notin E$, а $x \in E$ — наилучшее приближение. Покажем, что $z = y - x \perp E$. Действительно, пусть не так, тогда существует $0 \neq v \in E$, такой, что $\langle v, z\rangle \neq 0$. По построению $\|z + \lambda v\| \geq \|z\|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Полагая $\lambda = -\overline{\langle v, z\rangle}/\|v\|^2$, имеем

$$\|z + \lambda v\| = \|z\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda\langle v, z\rangle) + |\lambda|^2\|v\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\langle v, z\rangle|^2}{\|z\|^2} < \|z\|^2 \quad \text{— противоречие.} \tag{4.40}$$

Значит, $z \perp E$. •

Определение 4.6. *Ортогональным дополнением* к линейному подпространству L называется пространство

$$L^\perp := \{y \in H\colon\ \forall x \in L \quad y \perp x\}. \tag{4.41}$$

Упражнение 4.7. Покажите, что подпространство $L^\perp$ замкнуто.

Лемма 4.8. *Если L — собственное замкнутое подпространство H, то $L^\perp \neq \varnothing$ и $H = L \oplus L^\perp$.*

Доказательство. Ясно, что $L \cap L^\perp = \varnothing$. Рассмотрим $x \in H$, и пусть x_0 — наилучшее приближение точки x в пространстве L, тогда $x_1 = x - x_0 \perp L$, значит, $x_1 \in L^\perp$. Таким образом, $H = L \oplus L^\perp$. •

Лемма 4.9 (Рисс). *Пусть $\phi\colon H \to \mathbb{C}$ — ограниченный линейный функционал, тогда существует единственыый элемент $s_\phi \in H$ такой, что $\phi(x) = \langle x, s_\phi\rangle$, причем отображение $x \mapsto s_x$ — сопряженно линейный изоморфизм.*

Доказательство. Если $\phi = 0$, то $s_\phi = 0$. Пусть $\phi \neq 0$ и $N = \ker\phi$. Тогда, как нетрудно видеть, $\dim N^\perp = 1$ и $\phi(x) = \phi(x_1)$, где $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in N$, $x_1 \in N^\perp$, $\Rightarrow$ $\langle x, \overline{\phi(u)}u\rangle = \phi(u)\langle x_1, u\rangle = \phi(u)\langle \lambda_1 u, u\rangle = \phi(\lambda_1 u) = \phi(x_1) = \phi(x)$, где u — произвольный вектор из $N^\perp$ нормы 1. Значит, $s_x = \overline{\phi(u)}u$. •

Лемма 4.10. *Пусть $B(x, y)$ — полуторалинейная форма на H, такая, что $|B(x, y)| = O(\|x\|\,\|y\|)$. Тогда существует единственный оператор $S \in B(H)$ такой, что $B(x, y) = \langle Sx, y\rangle$, причем $\|S\| = \|B\|$.*

Доказательство. При фиксированном x отображение $f_x\colon y \mapsto B(y, x)$ является ограниченным линейным функционалом на H, значит, по теореме Рисса может быть представлено в виде $f_x(y) = \langle y, s_x\rangle$. Положим $Sx = s_x$, тогда S — ограниченный линейный оператор, и $B(x, y) = \langle Sx, y\rangle$. Единственность S следует из невырожденности скалярного произведения.

Ясно, что $\|S\| \leq \|B\|$. С другой стороны, $|B(x, y) = |\langle Sx, y\rangle| \leq \|S\|\,\|x\|\,\|y\|$, откуда (переходим к sup) следует неравенство $\|B\| \leq \|S\|$. •

Алгебра $B(H)$

Рассмотрим алгебру $B(H)$ ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H.

Упражнение 4.11. $B(H)$ — банахова алгебра относительно операторной нормы

$$\|T\| := \sup_{x \in H} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4.42}$$

(Докажите, что $\|\cdot\|$ — норма, $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ и что A полна в этой норме.)

Лемма 4.12. *Для любого $T \in B(H)$ существует единственный оператор $T^* \in B(H)$, называемый* сопряженным *к T, такой, что $\langle Tx, y\rangle \equiv \langle x, T^*y\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим полуторалинейную форму $B(y,x) = \langle y, Tx\rangle$. По лемме 4.10 однозначно определен линейный оператор T^*, такой, что $B(y,x) = \langle T^*y, x\rangle$, что и требовалось доказать. •

Лемма 4.13. $B(H)$ *— симметрическая банахова алгебра относительно инволюции $T \mapsto T^*$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\|T^*\| = \|T\|$, а это тоже следствие леммы 4.10. •

Лемма 4.14. $B(H)$ *является C^*-алгеброй*

Доказательство. Проверим равенство $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Действительно, $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$. В то же время $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|T^*T\|\,\|x\|^2 \;\Rightarrow\; \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

Остальные свойства очевидны. •

Определение 4.15. *Нормальной подалгеброй* в $B(H)$ называется замкнутая коммутативная подалгебра со свойством $A^* = A$.

Заметим, что, поскольку нормальная подалгебра A инвариантна относительно $*$, A сама является C^*-алгеброй.

Интеграл по проекторнозначной мере

Пусть $\mathcal{M}$ — компактное хаусдорфово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ — борелевская σ-алгебра для $\mathcal{M}$ и H — гильбертово пространство.

Определение 4.16. *Разложением единицы* или *проекторнозначной мерой* на $\mathcal{M}$ называется отображение $E\colon \mathcal{B}(\mathcal{M}) \to B(H)$ со следующими свойствами:

1) $E(\varnothing) = 0$, $E(\mathcal{M}) = \mathrm{id}$;

2) $E(\omega)^2 = E(\omega) = E(\omega)^*$;

3) $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)E(\omega_2)$;

4) $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing \;\Rightarrow\; E(\omega_1 \cup \omega_2) = E(\omega_1) + E(\omega_2)$;

5) $\forall\, x, y \in H$ функционал $\mu_{x,y}(\omega) = \langle E(\omega)x, y\rangle$ является конечной комплексной мерой на $\mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Комментарий 4.17. Свойство 2) означает, что $E(\omega)$ — ортогональный проектор (на пространство $\operatorname{ran} E(\omega)$). Из 3) следует, что $E(\omega_1)$ и $E(\omega_2)$ коммутируют, а из 3) и 4) $\Rightarrow$ $R_1 \overset{R_1\cap R_2}{\perp} R_2$, где $R_1 = \operatorname{ran} E(\omega_1)$, $R_2 = \operatorname{ran} E(\omega_2)$.

Определение 4.18. Определим пространство $L^\infty(E)$ как линейное пространство $\mathcal{B}(\mathcal{M})$-измеримых функций с ограниченным множеством существенных значений

$$\operatorname{ess\,ran}_E f = \bigcap \bigl\{K \subseteq \mathbb{C}\colon\ E(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus K)) = 0,\ \ K \text{ замкнуто}\bigr\}. \tag{4.43}$$

Теорема 4.19. *Равенство* $\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_{\mathcal{M}} f\, d\mu_{x,y}$ *определяет изометрический изоморфизм между* $L^\infty(\mathcal{M})$ *и некоторой нормальной подалгеброй в* $B(H)$.

Замечание 4.20. Используется следующая сокращенная запись: $\Psi(f) = \int_{\mathcal{M}} f\, dE$.

Спектральная теорема

Теорма 4.21. *Пусть A — нормальная подалгебра $B(H)$,* $\mathrm{id} \in A$, *и $\mathcal{M}$ — пространство максимальный идеалов A. Тогда существует единственное E такое, что*

$$T = \int_{\mathcal{M}} \widehat{T}\, dE, \qquad T \in A, \tag{4.44}$$

причем $E(\omega) \neq 0$, для любого открытого $\omega \neq \varnothing$. Кроме того, оператор S коммутирует со всеми $T \in A$ тогда и только тогда, когда T коммутирует со всеми ортопроекторами $E(\omega)$.

Спектральная теорема для нормального оператора

Пусть T — нормальный оператор ($TT^* = T^*T$). Рассмотрим нормальную подалгебру, порожденую T, — минимальную замкнутую алгебру, содержащую T и T^*. И пусть $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов A.

Лемма 4.22. *Отображение* $\widehat{T}\colon \mathcal{M} \to \operatorname{Sp}(T)$ *является гомеоморфизмом.*

Упражнение 4.23. Докажите, что $\operatorname{Sp}_A(T) = \operatorname{Sp}_{B(H)}(T)$.

Рассморим отображение $F\colon A \to C(\operatorname{Sp}(T))$, $F(a)(z) = \widehat{a}(\widehat{T}^{-1}(z))$, и заметим, что $F(T)(z) = z$. Поскольку пространства $\mathcal{M}$ и $\operatorname{Sp}(T)$ изоморфны, удобно рассматривать второе пространство вместо первого и соответственно переопределить преобразование Гельфанда. Тогда

$$\sum_{\alpha,\beta} \widehat{c_{\alpha,\beta}\, T^\alpha (T^*)^\beta} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\, z^\alpha \overline{z}^\beta, \tag{4.45}$$

а спектральная теорема может быть записана в форме

$$T = \int_{\operatorname{Sp}(T)} z\, dE. \tag{4.46}$$