5. Спектральная теорема для унитарного оператора. Спектральные инварианты

Случай циклического пространства

Пусть T — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H. Напомним, что унитарный оператор является нормальным.

Упражнение 5.1. Докажите, что $\mathrm{Sp}(T) \subseteq S^1 = \{|z| = 1\}$.

Рассмотрим спектральную меру $\mu_{x,y}$. В данном случае она строится по последовательности корреляций:

$$\int_{S^1} z^k \, d\mu_{x,y} = \langle T^k x, y \rangle. \tag{5.47}$$

Определение 5.2. Циклическим пространством элемента $x \in H$ относительно оператора T называется минимальное замкнутое подпространство $Z(x)$, содержащее элементы $T^k x$, $k \in \mathbb{Z}$. Говорят, что вектор x — циклический для оператора T, если $Z(x) = H$.

Предположим, что T обладает циклическим вектором x_0, и рассмотрим пространство $L^2(S^1, \mu_{x_0,x_0})$ и оператор $V_z\colon\ f(z) \mapsto zf(z)$.

Теорема 5.3. *Существует унитарная эквивалентность $U\colon\ H \to L^2((S^1, \mu_{x_0,x_0})$, такая, что $U \circ T \circ U^{-1} = V_z$.*

Доказательство. Пусть $U\colon\ T \mapsto z$, тогда для любого лорановского полинома $P(z)$: $U(P(T)x_0) = P(z)$ и

$$(U \circ T \circ U^{-1})P(z) = U(T(P(T)x_0)) = U((TP(T))x_0) = zP(z). \tag{5.48}$$

Далее, для $P(z) = \sum_k a_k z^k$, $Q(z) = \sum_l b_l z^l$ имеем

$$\begin{aligned}\langle P(T)x_0, Q(T)x_0 \rangle = \langle Q(T)^* P(T)x_0, x_0 \rangle = \sum_{k,l} a_k \overline{b}_l \left\langle T^{k-l} x_0, x_0 \right\rangle = \\ = \sum_{k,l} a_k \overline{b}_l \int_{S^1} z^{k-l} \, d\mu_{x_0,x_0} = \int_{S^1} P(z)\overline{Q(z)} \, d\mu_{x_0,x_0}.\end{aligned} \tag{5.49}$$

С другой стороны,

$$\langle UP(T)x_0, UQ(T)x_0 \rangle = \langle P(z), Q(z) \rangle = \int_{S^1} P(z)\overline{Q(z)} \, d\mu_{x_0,x_0} = \langle P(T)x_0, Q(T)x_0 \rangle \tag{5.50}$$

Значит, U сохраняет скалярное произведение $\Rightarrow$ является изометрией. Вектор x_0 циклический, поэтому U однозначно продолжается по непрерывности на все H. Наконец, проверим, что $\operatorname{ran} U = L^2(S^2, \mu_{x_0,x_0})$. Действительно, по теореме Гельфанда–Наймарка полиномы вида $P(z) = P(\widehat{a})$ плотны в $C(\mathrm{Sp}(T))$, а $C(\mathrm{Sp}(T))$ плотно в L^2. (Можно сослаться и на спектральную теорему.) Теорема доказана. •

Доказанная теорема дает стандартный способ представления (модель) унитарного оператора, обладающего циклическим вектором. Замечательный факт состоит в том, что это простое наблюдение позволяет определить все спектральные инварианты T.

Максимальный спектральный тип и функция кратности.

Положим (для краткости) $\mu_x = \mu_{x,x}$.

Лемма 5.4. *Если $y \in Z(x)$, то $\mu_y \ll \mu_x$, причем $\mu_y \sim \mu_x \iff Z(y) = Z(x)$.*

Доказательство. Пусть $y = \sum a_k T^k x$, тогда

$$\langle T^n y, y\rangle = \sum k, l a_k \overline{a}_l \langle T n + k - l x, x\rangle = a * \widetilde{a} * c, \tag{5.51}$$

где $c_j = \left\langle T^j x, x\right\rangle$, $\widetilde{a}_k = \overline{a}_{-k}$. Формальное применение преобразование Фурье дает равенство

$$\mu_y = |\widehat{a}|^2 \mu_x. \tag{5.52}$$

Но по спектральной теореме $\widehat{a} \in L^2(\mu_x)$, значит, $|\widehat{a}|^2 \in L^1(\mu_x)$, т.е. $\mu_y \ll \mu_x$. Данное рассуждение легко формализуется, если вместо ряда рассмотреть приближение y сумма вида $P(T)x$.

Если $\mu_y \sim \mu_x$, то $\mu_x = |\widehat{a}|^2 \mu_y$ и нужно обратить рассуждение. •

Следствие 5.5. *Инвариантное подпространство циклического пространство само является циклическим.*

Лемма 5.6. $T|_{Z(x)} \cong T|_{Z(y)} \iff \mu_x \sim \mu_y$.

Доказательство. Пусть U — спектральная эквивалентность $T|_{Z(x)}$ и $T|_{Z(y)}$. Ясно, что U переводит x в некоторый циклический вектор оператора $T|_{Z(y)}$, но тогда $\mu_{U(x)} \sim \mu_y$, а $\mu_{U(x)} = \mu_x$, так как корреляционные последовательности у x и $U(x)$ совпадают.

Обратно, $T|_{Z(x)} \sim V_z^{(\mu_x)}$ и $T|_{Z(y)} \sim V_z^{(\mu_x)}$, а $V_z^{(\mu_x)}$ и $V_z^{(\mu_x)}$ эквивалентны между собой, если $\mu_x \sim \mu_y$. •

Лемма 5.7. *Если $\mu_x \perp \mu_y$, то $Z(x) \perp Z(y)$.*

Доказательство. Пусть не так: существует $v \in Z(y)$, имеющее нетривиальную ортопроекцию v_0 на $Z(x)$; пусть $v = v_0 + v_1$. В силу инвариантности пространств $Z(x)$ и $Z(x)^\perp$, $\langle T^k v, v\rangle = \langle T^k v_0, v_0\rangle + \langle T^k v_1, v_1\rangle$, значит, $\mu_v = \mu_{v_0} + \mu_{v_1}$. В частности, $\mu_{v_0} \ll \mu_v \ll \mu_y$, поскольку, все меры μ_z положительны. Но $v_0 \in Z(x) \Rightarrow \mu_{v_0} \ll \mu_x$, следовательно, $\mu_{v_0} = 0$ и $v_0 = 0$ — противоречие. •

Обратное, конечно, не верно (случай кратного спектра).

Упражнение 5.8. Докажите, что если $\mu_x \perp \mu_y$, то $\mu_{x+y} = \mu_x + \mu_y$ и $Z(x+y) = Z(x) \oplus Z(y)$.

Следствие 5.9. *Пусть $x = \sum_n x_n$ (ряд сходится в H) и $\mu_{x_n} \perp \mu_{x_m}$, тогда*

$$\mu_x = \sum_n \mu_{x_n} \quad \text{и} \quad Z(x) = \bigoplus_n Z(x_n). \tag{5.53}$$

Упражнение 5.10. Докажите, что если $x_n \to x$ и $\mu_{x_n} \ll \nu$, где ν — конечная положительная борелевская мера, то $\mu_x \ll \nu$. Кроме того, $\mu_{x_n} \perp \nu \Rightarrow \mu_x \perp \nu$.

Определение 5.11. Назовем циклическое пространство максимальным, если оно не содержится в большем циклическом пространстве.

Лемма 5.12. *Если $Z(x)$ максимально тогда и только тогда, когда $\mu_y \ll \mu_x$ для любого $y \in H$.*

Доказательство. Предположим, что существует y, не удовлетворяющее условию леммы. Тогда найдется вероятностная мера $\nu \ll \mu_y$ такая, что $\nu \perp \mu_x$. Мы знаем, что существует $v \in Z(y)$, $\mu_z = \nu$. Тогда $Z(v) \perp Z(x)$ и $Z(x+v) = Z(x) \oplus Z(v) > Z(x)$ — противоречие с максимальностью.

Доказательство в обратную сторону тривиально. •

Из этой леммы следует, что спектральный тип максимального циклического подпространства определен однозначно, т.е. если $Z(x)$ и $Z(y)$ максимальные, то $\mu_x \sim \mu_y$.

Теорема 5.13. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Для любого $x \in H$ существует максимальное циклическое подпространство, содержащее x.*

Определение 5.14. Класс эквивалентности спектральной меры максимального циклического подпространства называется *максимальным спектральным типом* оператора T.

Теорема 5.15. *Пусть $T\colon H \to H$ — унитарный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда найдутся $x_1, x_2, \ldots$:*

$$H = \bigoplus_{m=1}^{\infty} Z(x_n), \qquad \mu_{x_1} \gg \mu_{x_2} \gg \ldots \tag{5.54}$$

Данное представление H называется *спектральным разложением*.

Определение 5.16. Пусть $A_1 = S^1$ и A_n — носитель производной меры μ_n относительно μ_{n-1}. *Функцией кратности* называется функция $M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}(z)$.

Теорема 5.17. *Функция кратности определена однозначно с точностью до множества μ_{x_1}-меры нуль (и инвариантна относительно унитарной эквивалентности). Таким образом, мера μ_{x_1} и функция кратности $M(x)$ образуют полное семейство спектральных инвариантов оператора T.*