# 6. Основные понятия и конструкции

## *Пространства Лебега*

**Определение 6.1.** *Пространством с мерой* или *измеримым пространством* называется тройка $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mu$ — положительная (но не обязательно конечная) мера на множестве $X$, определенная на $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$.

$\boldsymbol{X}$ называется *вероятностным пространством*, если $\mu(X) = 1$.

**Определение 6.2.** *Пополнением* $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ относительно меры $\mu$ называется $\sigma$-алгебра $[\mathcal{A}]_\mu$, состоящая из всех множеств $C$, таких, что $\mu^*(A \triangle C) = 0$ для некоторого $A = A(C) \in \mathcal{A}$, где $\mu^*$ — соответствующая верхняя мера. Мера на $[\mathcal{A}]_\mu$, определённая равенством $\mu(C) = \mu(A(C))$ называется *Лебеговским продолжением* меры $\mu$.

Алгебра называется *полной*, если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_\mu$.

**Замечание 6.3.** Конечно, измеримые пространства рассматриваются с точностью до изоморфизма, определяемого следующим образом:

**Определение 6.4.** Пусть $\mathrm{Id}_X$ — класс отображений $\phi\colon X \to X$, таких, что $\phi^{-1}A = A$ с точностью до множества меры 0 (¡¡mod 0¿¿) для любого $A \in \mathcal{A}$. Скажем, что $\boldsymbol{X} \cong \boldsymbol{Y}$, если существуют отображения

$$\Phi\colon X \to Y \quad \text{и} \quad \Psi\colon Y \to X, \tag{6.55}$$

такие, что

$$\Phi \circ \Psi \in \mathrm{Id}_Y \quad \text{и} \quad \Psi \circ \Phi \in \mathrm{Id}_X\,. \tag{6.56}$$

Каждое из отображений $\Phi$ и $\Psi$ называется *изоморфизмом* пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

**Упражнение 6.5.** Верна ли импликация $f \in \mathrm{Id}_X \;\Rightarrow\; f = \mathrm{id}_X \pmod 0$?

**Определение 6.6.** Будем считать два измеримых отображения $f, g\colon (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \nu)$ тождественными: $f \sim g$, если $f^{-1}A = g^{-1}A \pmod 0$ для любого $A \in \mathcal{B}$.

**Определение 6.7.** Конечная или счётная совокупность $\boldsymbol{B} = \{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ называется *базисом* пространства $\boldsymbol{X}$, если выполнены следующие условия:

1) для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется множество $B \in \boldsymbol{B}$ такое, что $x \in B$, а $y \notin B$, или наоборот;

2) пополнение $\sigma$-алгебры, порожденной $\boldsymbol{B}$, совпадает с $\mathcal{A}$.

Сопоставим каждой последовательности $a = (a_n)$, $a_n \in \{0, 1\}$ множество

$$B^a = \bigcap_n B_n^{a_n}, \qquad \text{где} \quad B^0 := B, \quad B^1 := X \setminus B. \tag{6.57}$$

**Определение 6.8.** Базис $\boldsymbol{B}$ называется *полным*, если для любого $a$ множество $B^a \neq \varnothing$, т.е. отображение $x \to a$, $x \in B^a$, — биекция.

Говорят, что пространство $(X,\mathcal{A},\mu)$ полно $(\operatorname{mod} 0)$ относительно базиса $\boldsymbol{B}$, если существует бóльшее пространство $(X',\mathcal{A}',\mu')$ с полным базисом $\boldsymbol{B}'$, а также измеримое вложение $I\colon X\to X'$, обладающее следующими свойствами: $IX\in\mathcal{A}'$, $\mu(X'\setminus IX)=0$ и $B_n=I^{-1}B'_n$.

**Определение 6.9.** Пространство $\boldsymbol{X}$, обладающее полным $(\operatorname{mod} 0)$ базисом, называется *пространством Лебега*.

**Теорема 6.10.** *Любое пространство Лебега с непрерывной вероятностной мерой изоморфно отрезку* $[0,1]$ *со стандартной мерой Лебега на нём.*

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь этот класс пространств.

**Следствие 6.11.** *Пространство Лебега с конечной мерой изоморфно пространству вида* $([0,1],a\lambda)\sqcup(D,\eta)$, *где* $\lambda$ *— стандартная мера Лебега на* $[0,1]$, *а* $(D,\eta)$ *— некоторое дискретное измеримое пространство.*

**Упражнение 6.12.** Декартово произведение счетного семейства пространств Лебега является пространством Лебега.

**Лемма 6.13.** *Если* $\boldsymbol{X}$ *— пространство Лебега, то* $L^2(\boldsymbol{X})$ *сепарабельно.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из существования у $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ счетного порождающего множества $\boldsymbol{B}$. •

**Лемма 6.14.** *В пространстве лебега* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *любая (полная)* $\sigma$*-подалгебра* $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ *является счетно-порождённой.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $H_{\mathcal{F}}=L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ классов $(\operatorname{mod} 0)$ квадратично интегрируемых $\mathcal{F}$-измеримых функций на $X$. Выберем в $H_{\mathcal{F}}$ произвольный счетный базис $f_1,\ldots$, а также некоторый счетный базис $B_1,\ldots$ борелевской $\sigma$-алгебры на $\mathbb{R}$. Тогда $\{f_k^{-1}B_j\}$ — искомый базис $\mathcal{F}$. •

## Измеримые разбиения

**Определение 6.15.** *Разбиенем* множества $X$ называется множество $\xi$ дизъюнктных подмножеств множества $X$ со следующим свойством: $\bigsqcup_{C\in\xi}C=X$. Множества $C\in\xi$ называются *элементами* или *атомами* разбиения $\xi$.

В эргодической теории приняты следующие обозначения для тривиального разбиения и разбиения на точки:

$$\boldsymbol{\nu}:=\{X\},\qquad \boldsymbol{\omega}:=\{\{x\}\}. \tag{6.58}$$

**Определение 6.16.** Разбиение $\xi$ называется *измеримым*, если найдется счётная совокупность $\boldsymbol{B}$, разделяющая элементы $\xi$.

**Конитрукция 6.17.** Пусть $\xi$ — измеримое разбиение. Говорят, что множество $A$ является *$\xi$-множеством*, если $A$ есть объединение атомов $\xi$. Путь $\mathcal{A}(\xi)$ — $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$-измеримых $\xi$-множеств.

Обратно, каждой полной $\sigma$-подалгебре $\mathcal{F}$ соответствует измеримое разбиение $\xi(\mathcal{F})$, атомами которого являются множества $B^a$, где $\boldsymbol{B} \subset \mathcal{F}$ — некоторое счетное порождающее множество для $\mathcal{F}$ (см. 6.14).

**Теорема 6.18.** *Отображение $\xi \to \mathcal{A}(\xi)$ определяет естественную биекцию решетки измеримых разбиений $(\mathrm{mod}\, 0)$ и решетки полных $\sigma$-подалгебр алгебры $\mathcal{A}$.*

Эта замечательная теорема позволяет в зависимости от ситуации пользоваться как языком $\sigma$-алгебр, так и языком измеримых разбиений. Иллюстрациями служат следующая теорема, а также конструкция факторизации, о которой пойдёт речь ниже.

**Лемма 6.19.** *$L^2(\boldsymbol{X})$ сепарабельно $\iff$ $\boldsymbol{X}$ изоморфно пространству Лебега.*

Доказательство. Пусть $L^2(\boldsymbol{X})$ сепарабельно. Рассмотрим счётное порождающее множество $\boldsymbol{B}$ для $\sigma$-алгебры $\mathcal{A}$ и определим разбиение $\xi := \{B^a\}$. По построению $\xi$ измеримо. Полагая $Y := \xi$, рассмотрим пространство $\boldsymbol{Y} = (Y, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu)$, где $\widetilde{\mathcal{A}}$ — $\sigma$-алгебра, определяемая следующим тавтологическим способом: $\widetilde{\mathcal{A}}$ состоит из таких подмножеств $A$ множества $Y = \xi$, что $\bigsqcup_{C \in A} C \in \mathcal{A}$. Очевидно, отождествляя подмножества $A$ в $Y$ с соответствующими $\xi$-множествами в $X$, можно считать, что $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. Ясно, что $\boldsymbol{X} \cong \boldsymbol{Y}$.

Пусть $Y' := Y \sqcup \{a\colon\ B^a = \varnothing\}$; $\widetilde{\mathcal{A}}'$ и $\mu'$ на $Y$ совпадают с $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mu$ соответственно; любое подмножество $E \subseteq Y' \setminus Y \in \widetilde{\mathcal{A}}'$, причем $\mu'(E) = 0$. И пусть $I(y) \equiv y$. Тогда пространство $(Y', \widetilde{\mathcal{A}}', \mu')$ является полным относительно базиса $B'_n = IB_n \sqcup \{a\colon\ B^a = \varnothing,\quad a_n = 0\}$, а $\boldsymbol{Y}$ — полным $(\mathrm{mod}\, 0)$ относительно базиса $B_n$, что и требовалось доказать. •

**Определение 6.20.** Пусть $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство Лебега и $\mathcal{F}$ — полная $\sigma$-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Пространство $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_{\mathcal{F}} = (X, \mathcal{F}, \mu)$ называется *фактор-пространством* пространства $\boldsymbol{X}$, а пространство $\boldsymbol{X}$, соответственно, — *расширением* $\boldsymbol{Y}$.

Заметим, что пространство $\boldsymbol{Y}$ также пространство Лебега. Действительно, пусть $Y$ — множество атомов разбиения $\xi(\mathcal{F})$ (т.е., по сути, $Y = \xi$). Тогда $\mathcal{F}$ можно считать $\sigma$-алгеброй на $Y$, а пространство $(Y, \mathcal{F}, \mu)$ — моделью пространства $\boldsymbol{Y}$, в которой $\xi(\mathcal{F}) = \boldsymbol{\omega}$.

**Конструкция 6.21.** Пусть $\pi_{\mathcal{F}}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ — отображение, сопоставляющее точке $x \in X$ элемент разбиения $\xi(\mathcal{F})$, которому она принадлежит. Очевидно, $\pi_{\mathcal{F}}$ — сохраняющее меру отображение. Таким образом, каждому фактор-пространству отвечает измеримая проекция $\pi_{\mathcal{F}}\colon\ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}_{\mathcal{F}}$.

Наоборот, по произвольному морфизму $f\colon\ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ можно построить полную $\sigma$-подалгебру $f^{-1}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Y}$ естественно изоморфно некоторому фактор-пространству пространства $X$.

Следующая важная теорема позволит (см. ) дать еще одну интерпретацию факторов и расширений динамических систем.

**Теорема 6.22.** *Пусть $\xi$ — измеримое разбиение пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Для почти почти всех атомов $c \in \xi$ существуют $\sigma$-алгебра $\mathcal{S}_c$ подмножеств $c$ и вероятностная мера $\mu(\cdot \mid c)$ на пространстве $(c, \mathcal{S}_c)$ со следующими свойствами:*

*1) $(c, \mathcal{S}_c)$ — пространство Лебега.*

*2) Для любого $A \in \mathcal{A}$ множество $A \cap c \in \mathcal{S}_c$ для почти всех $c \in \xi$.*

*3) Функция $c \mapsto \mu(A \mid c)$ является $\mathcal{A}(\xi)$-измеримой.*

*4) $\mu(A) = \int_\xi \mu(A \mid c)\, \mu(dc)$ для любого $A \in \mathcal{A}$.*

### *Действия с инвариантной мерой*

**Определение 6.23.** Эндоморфизмом пространства $\boldsymbol{X}$ называется отображение $T\colon X \to X$ такое, что $T^{-1}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ и $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Если, к тому же, преобразование $T$ обратимо, и обратное также эндоморфизм, то $T$ называется *автоморфизмом*.

Группа всех автоморфизмов пространства $X$ обозначается $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{X})$ (или $\mathrm{Aut}(\mu)$).

**Упражнение 6.24.** Докажите, что для любого $T \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{X})$ существуют автоморфизмы $I_1$, $I_2$, $I_3$, такие, что $T = I_1 I_2 I_3$, причем $I_k^2 = \mathrm{id}$.

**Определение 6.25.** *Действием* группы $G$ на пространстве $\boldsymbol{X}$ называется гомоморфизм

$$G \to \mathrm{Aut}(\boldsymbol{X})\colon\ g \mapsto T^g. \tag{6.59}$$

Обычно в качестве $G$ рассматривается либо счетная группа, либо топологическая группа, и тогда на действие накладываются дополнительные ограничения непрерывности или измеримости.

**Пример 6.26.** Автоморфизм $T$ порождает действие $(T^k)$ группы $\mathbb{Z}$ по правилу: $T^0 = \mathrm{id}_X$; $T^k$ суть степень $T$, если $k > 0$; и $T^k = (T^{-1})^{-k}$, если $k < 0$.

### *Метрический изоморфизм действий*

Рассмотрим действие $\boldsymbol{T} = (T^g)$ группы $G$ на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**Определение 6.27.** Будем говорить, что динамические системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T})$ и $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S})$ (*метрически*) *изоморфны*, если существует изоморфизм $\Phi$ пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{T^g} & \boldsymbol{X} \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{S^g} & \boldsymbol{Y} \end{array} \tag{6.60}$$

в том смысле, что $\Phi \circ T^g \sim S^g \circ \Phi$.

### *Факторы, расширения*

Пусть, как и раньше, $\boldsymbol{T} = (T^g)$ — действие группы $G$ на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

**Определение 6.28.** $\sigma$-подалгебра $\mathcal{F}$ называется *инвариантной* относительно действия $\boldsymbol{T}$, если $(T^g)^{-1}A \in \mathcal{A}$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

**Лемма 6.29.** *Пусть $\mathcal{F}$ — полная $\boldsymbol{T}$-инвариантная $\sigma$-подалгебра. Тогда на фактор-пространстве $\boldsymbol{Y} = (\xi(\mathcal{F}), \mathcal{F}, \mu)$ существует действие $(T^g_{\mathcal{F}})$, такое, что $(T^g_{\mathcal{F}})^{-1}A = (T^g)^{-1}A$ для любого измеримого множества $A$.*

Доказательство. В силу инвариантности подалгебры $\mathcal{F}$ для почти каждого атома $y \in \xi(\mathcal{F})$ множество $(T^g)^{-1}y$ является $\xi(\mathcal{F})$-множеством.

**Упражнение 6.30.** $T^g\xi := \{(T^g)^{-1}y\colon\ y \in \xi(\mathcal{F})\}$ суть измеримое разбиение, причем

$$\mathcal{A}(T^g\xi(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{F}. \tag{6.61}$$

Пусть $T^g_{\mathcal{F}}c \stackrel{\text{def}}{=} y$ для $c \in (T^g)^{-1}y$. Ясно (см. упражнение), что построенные отображения измеримы и образуют действие. Равенство $(T^g_{\mathcal{F}})^{-1}A = (T^g)^{-1}A$ следует из конструкции. •

**Замечание 6.31.** *Доказательство данной леммы дословно переносится на случай одного необратимого преобразования (эндоморфизма).*

**Упражнение 6.32.** Проверьте, что для действия группы: $\mathcal{A}(T^g\xi(\mathcal{F})) \equiv \mathcal{F} \pmod 0$.

Определённое таким способом, причем однозначно $(\operatorname{mod} 0)$ действие на пространстве $\boldsymbol{Y} = (\xi(\mathcal{F}), \mathcal{F}, \mu)$ называют *фактор-действием* (или просто *фактором* исходной динамической системы).

Напомним, что с каждой $\sigma$-подалгеброй $\mathcal{F}$ связано отображение $\pi_{\mathcal{F}}\colon\ \boldsymbol{X} \to Y$. Инвариантность $\mathcal{F}$ относительно действия $(T^g)$ может быть иначе определена как эквивариантность проекции $\pi_{\mathcal{F}}$, т.е. коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \xrightarrow{T^g} & \boldsymbol{X} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathcal{F}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{F}}} \\ \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{T^g_{\mathcal{F}}} & \boldsymbol{Y}. \end{array} \tag{6.62}$$

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между морфизмами $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T}) \to (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{S})$ и факторами системы $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{T})$.

Рассмотрим сейчас действие группы $\mathbb{Z}$, порождённое автоморфизмом $T$ пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Рассмотрим также $\mathcal{A}$-измеримое семейство автоморфизмов $S_x$ второго пространства Лебега $(Y, \mathcal{B}, \eta)$.

**Определение 6.33.** Автоморфизм $\widetilde{T}$ на пространстве $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, заданный равенством

$$\widetilde{T}(x, y) := (Tx, S_x y), \tag{6.63}$$

называется *косым произведением* над $T$.

**Упражнение 6.34.** Проверьте, что отображение $\widetilde{T}$ действительно являеттся автоморфизмом, т.е. измеримо, сохраняет меру, обратимо ...

Заметим, что система $(\boldsymbol{X}, T)$ является фактором косого произведения, соответствующим проекции $(x, y) \mapsto x$. Оказывается, косое произведение может служить универсальной моделью расширений и фактор-систем.

**Определение 6.35.** Автоморфизм $T$ называется *эргодическим*, если из $T$-инвариантности измеримого множества $A$ следует, что $\mu(A) = 0$ или $\mu(X \setminus A) = 0$.

**Теорма 6.36.** *Пусть $R$ — эргодический автоморфизм пространства Лебега $\boldsymbol{Z} = (Z, \mathcal{Z}, \mu)$ и $\mathcal{F}$ — полная $R$-инвариантная подалгебра $\sigma$-алгебры $\mathcal{Z}$. И пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — фактор-пространство, отвечающее $\mathcal{F}$. Тогда верны следующие равносильные утверждения:*

*1. $(\boldsymbol{Z}, R) \overset{\Phi}{\cong} (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, \widetilde{T})$ для некоторого косого произведения $\widetilde{T}$ на $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{S}, \eta)$ — однозначно определенное (с точностью до изоморфизма) дискретное или непрерывное пространство Лебега. и изоморфизм $\Phi\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$, такие, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{R} & \boldsymbol{Z} \\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\ \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} & \xrightarrow{\widetilde{T}} & \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}. \end{array} \tag{6.64}$$

*2. Для почти всех атомов $x$ разбиения $\xi = \xi(\mathcal{F})$ существует изоморфизм $\phi_x$ пространства $(x, \mathcal{S}_x, \mu(\cdot|\, x)$ из конструкции канонического семейства условных мер и некоторого пространства Лебега $(Y, \mathcal{S}, \eta)$, измеримо зависящий от $x$, а также измеримое семейство изоморфных отображений $S_x\colon Y \to Y$, удовлетворяющие $(\mathrm{mod}\, 0)$ соотношениям, выраженным следующей коммутативной диаграммой $(T = R_{\mathcal{F}})$:*

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{R} & Tx \\ \phi_x\downarrow & & \downarrow\phi_{Tx} \\ Y & \xrightarrow{S_x} & Y. \end{array} \tag{6.65}$$

## Джойнинги

Расстроим две динамические системы $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$.

**Определение 6.37.** *Джойнингом* систем $(\boldsymbol{X}, T)$ и $(\boldsymbol{Y}, S)$ называется мера $\eta$ на пространстве $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\eta|_{\mathcal{A}} = \mu$, $\eta|_{\mathcal{B}} = \nu$;

2) $\eta$ инвариантна относительно $T \times S$.

Каждому джойнингу соответствует динамическая система $(\boldsymbol{Z}, T \times S)$ на пространстве $\boldsymbol{Z} = (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \eta)$. Иными словами, джойнинг — это пара морфизмов

$$\begin{array}{ccc} (\boldsymbol{Z}, R) & \xrightarrow{g} & (\boldsymbol{Y}, S) \\ f\downarrow & & \\ (\boldsymbol{X}, T), & & \end{array} \tag{6.66}$$

где $f^{-1}\mathcal{A} \vee g^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{Z}$.

**Определение 6.38.** Говорят, что динамические системы $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ *дизъюнктны*, $T \perp S$, если $\mu \times \nu$ — единственный джойнинг этих систем.

**Теорема 6.39.** *Если меры максимального спектрального типа автоморфизмов $T$ и $S$ в пространстве $\{\mathrm{const}\}^{\perp}$ взаимно сингулярны, то $T \perp S$.*