7. Классификация автоморфизмов с чисто точечным спектром

Определение 7.1. Пусть T — автоморфизм пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Говорят, что T имеет *чисто точечный* (¡¡*дискретный*¿¿) *спектр*, если в пространстве $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ существует полный ортонормированный базис, состоящий из собственных функций T.

Пусть Λ_T — множество собственных значений T.

Лемма 7.2. *Λ_T счетно.*

Доказательство. Пространство $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ сепарабельно. •

Следующая лемма является очевидным следствием спектральной теоремы.

Лемма 7.3. *Пусть T — автоморфизма с дискретным спектром.*

1. Мера максимального спектрального типа σ для T суть произвольная мера на Λ_T, такая, что $\sigma(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_T$.

2. T имеет простой спектр.

3. Множество Λ_T однозначно с точностью до унитарной эквивалентности задаёт оператор, ассоциированный с T.

Мы покажем, что Λ является также полным метрическим инвариантом T.

Лемма 7.4. *Множество Λ_T является счётной подгруппой $S^1 = \{|z| = 1\}$.*

Доказательство. В самом деле, если $Tf_1 = \lambda_1 f_1$, $Tf_2 = \lambda_2 f_2$, то $T(f_1 f_2) = (\lambda_1 \lambda_2)(f_1 f_2)$. •

Сдвиги на компактных абелевых группах

Рассмотрим компактную абелеву топологическую группу G и дуальную к ней группу $\widehat{G}$. Напомним, что $\widehat{G}$ состоит из характеров G со значениями в S^1, т. е. гомоморфизмов $\chi\colon G \to S^1$.

Напомним два классических результата.

Лемма 7.5 (Понтрягин). *1. Группа $\widehat{G}$ счётна.*

2. $\widehat{\widehat{G}} = G$. Отображение $G \to \widehat{\widehat{G}}\colon\ g \mapsto g^*(\chi) := \chi(g)$ является изоморфизмом.

Определение 7.6. Трансляционно-инвариантная положительная борелевская мера μ на группе G называется *Мерой Хаара* G.

Лемма 7.7. *Любая компактная абелева группа обладает нормированной мерой Хаара. Характеры $\chi \in \widehat{G}$ образуют полный ортогональный базис гильбертова пространства $L^2(G, \mu)$. В частности, (G, μ) — пространство Лебега.*

Определение 7.8. Отображение $T_a\colon g \to a + g$ называется *преобразованием сдвига* на элемент $a \in G$.

По построению $T_a \in \operatorname{Aut}(G, \mu)$.

Упражнение 7.9. Для каких a автоморфизм T_a эргодичен?

Теорема 7.10. *Преобразование сдвига T_a является автоморфизмом с чисто точечным спектром, причем $\Lambda_{T_a} = a^*(\widehat{G}) = \{\chi(a)\colon\ \chi \in \widehat{G}\}$.*

Доказательство. Заметим, что $(T_a\chi)(g) = \chi(a+g) = \chi(a)\chi(g)$, т.е. характер χ является собственной функцией для T_a с собственным значением $\chi(a)$. Остаётся воспользоваться полнотой системы $\{\chi(g)\}$ в $L^2(G,\mu)$. $\bullet$

Конструкция 7.11. Предположим теперь, что Λ — некоторая подгруппа S^1. Покажем, что $\Lambda = \Lambda_{T_a}$ для некоторого сдвига T_a. Действительно, пусть $G = \widehat{\Lambda}$. Поскольку $\Lambda \subset S^1$, можно рассмотреть соответствующее вложение $i\colon\ \Lambda \to S^1\colon\ \lambda \to \lambda$. Тогда $i = a^*$ для некоторого $a \in G$, а преобразование T_a искомое, так как

$$\Lambda_{T_a} = a^*(\widehat{G}) = i(\widehat{\widehat{G}}) = i(\Lambda) = \Lambda \subset S^1. \tag{7.67}$$

Сдвиги на компактных абелевых группах

Пусть T и S — эргодические автоморфизмы с дискретным спектром.

Теорема 7.12. *$T \cong S$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_T = \Lambda_S$.*

Доказательство. 1. В силу спектральной теоремы совпадение λ_T и λ_S — спектральный изоморфизм — является необходимым условием метрического.

2. Докажем достаточность. Для этого рассмотрим какой-нибудь эргодический джойнинг ϕ систем $(\boldsymbol{X},T)$ и $(\boldsymbol{Y},S)$. Он существует благодаря тому, что множество всех джойнингов — выпуклый компакт. Сопоставим алгебрам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вложения

$$i_{\mathcal{A}}\colon\ L^2(\boldsymbol{X}) \to L^2(\boldsymbol{Z}), \qquad (i_{\mathcal{A}}f)(x,y) := f(x), \tag{7.68}$$

$$i_{\mathcal{B}}\colon\ L^2(\boldsymbol{Y}) \to L^2(\boldsymbol{Z}), \qquad (i_{\mathcal{A}}g)(x,y) := g(y). \tag{7.69}$$

$i_{\mathcal{A}}$ и $i_{\mathcal{B}}$ инъективны и являются частичные изометриями. Рассмотрим также операторы условного математического ожидания $\mathsf{E}(\cdot|\pi_X^{-1}\mathcal{A})$ и $\mathsf{E}(\cdot|\pi_Y^{-1}\mathcal{B})$, действующие в $L^2(\boldsymbol{Z})$, $\boldsymbol{Z} = (X \times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \phi)$.

Покажем, что $i_{\mathcal{A}}$ и $i_{\mathcal{B}}$ — изоморфизмы. (Для этого достаточно проверить их сюръективность.)

В самом деле, во-первых, пусть $\{f_\lambda\}$ и $\{g_\lambda\}$ — состоящие из собственных функций базисы пространств $L^2(\boldsymbol{X})$ и $L^2(\boldsymbol{Y})$ соответственно. Тогда $\{f_{\lambda_1}\otimes g_{\lambda_2}\}$ — базис $L^2(\boldsymbol{Z})$, так как джойнинг ϕ определён на σ-алгебре $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \pi_X^{-1}\mathcal{A} \vee \pi_Y^{-1}\mathcal{B}$ (проанализируйте этот переход!). Кроме того, построенный базис также состоит из собственных функций, поскольку каждая из функций $i_{\mathcal{A}}f_{\lambda_1}$ и $i_{\mathcal{B}}g_{\lambda_2}$ является собственной для $T\times S$ (это следует из того, что $(T\times S)|_{i_{\mathcal{A}}L^2(\boldsymbol{X})} \circ i_{\mathcal{A}} = i_{\mathcal{A}} \circ T$ и аналогично для S). Значит, джойнинг также имеет чисто точечный спектр. Вспомним, что ϕ выбран эргодическим $\Rightarrow$ после сокращения этого семейства за счёт повторяющихся ($\phi -\mod 0$) функций снова получим семейство $\{h_\lambda\}$, $(T\times S)h_\lambda = \lambda h_\lambda$.

Заметим, что при этом $i_{\mathcal{A}}f_\lambda h_\lambda$ в силу эквивариантности оператора $i_{\mathcal{A}}$ (см. выше), т.е. $i_{\mathcal{A}}$ переводит один ортонормированный базис в другой $\Rightarrow$ $i_{\mathcal{A}}$ — изоморфизм, что и требовалось установить.

Итак, $i_{\mathcal{A}}$ — изоморфизм. Далее, мы знаем, что $E(\cdot|\mathcal{A})\circ i_{\mathcal{A}} = \mathrm{id}$, откуда (продумайте!), $i_{\mathcal{A}}^{-1}\circ E(\cdot|\mathcal{A}) = \mathrm{id} \ \Rightarrow\ E(\cdot|\mathcal{A}) = \mathrm{id}$, так как оператор условного математического ожидания —

проектор. Таким образом, $\pi_X^{-1}\mathcal{A} = \mathscr{Z}\ (\phi)$, т.е. пополнения отностельно ϕ этих алгебр совпадают, и π_X — изоморфизм пространств $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Z}$. В результате, в следующей диаграмме все стрелки — изоморфизмы:

$$\begin{tikzcd} (\boldsymbol{Z}, T \times S) \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & (\boldsymbol{Y}, S) \\ (\boldsymbol{X}, T) & \end{tikzcd} \tag{7.70}$$

Утверждение доказано •

Упражнение 7.13. Когда две системы с чисто точечным спектром дизъюнктны?