8. Статистические свойства динамических систем

Эргодичность

Определение 8.1. Скажем, что множество A *инвариантно* относительно действия $\boldsymbol{T} = (T^g)$ группы G на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, если $T^g A = A \pmod 0$ для любого $g \in G$. Действие $\boldsymbol{T}$ называется *эргодическим*, если для любого инвариантного измеримого множества A: $\mu(A) = 0$ или $\mu(X \setminus A) = 0$. Также говорят, что мера μ *эргодична* относительно действия $\boldsymbol{T}$.

В случае действий группы $\mathbb{Z}$, определяемых, как мы знаем, автоморфизмами T пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$, эргодичность означает отсутствие нетривиальных измеримых T-инвариантных множеств. Далее в этой лекции рассматриваются только $\mathbb{Z}$-действия.

Теорема 8.2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Автоморфизм T эргодичен.*
2. *Для любого измеримого множества A объединение $\bigcup_{k=1}^{\infty} T^k A = X$.*
3. $\forall\, A, B \in \mathcal{A},\ \mu(A), \mu(B) > 0, \quad \exists k > 0 \quad \mu(T^k A \cap B) > 0.$
4. *Для любой измеримой функции f: $Tf = f \ \Rightarrow\ f = \mathrm{const}$.*
5. $\forall\, f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$: $Tf = f \ \Rightarrow\ f = \mathrm{const}$.
6. *1 — простое собственное значение унитарного оператора, ассоциированного с T.*

Эргодическая теорема в $L^2(\boldsymbol{X})$

Рассмотрим функцию $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Определение 8.3. *Временны́ми средними* f назваются суммы

$$\mathsf{M}_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f. \tag{8.71}$$

Эргодическими теоремами называют утверждения об асимптотических свойствах временных средних.

Заметим, что функции $T^k f$ образуют стационарную последовательность случайных величин (на вероятностном пространстве $\boldsymbol{X}$), поэтому, с определённой точки зрения эргодические теоремы аналогичны предельным теоремам теории вероятностей.

Теорема 8.4 (фон Нейман). *Пусть U — линейный оператор в гильбертовом пространстве H, обладающий свойством $\|U\| \le 1$. И пусть P — ортопроектор на замкнутое инвариантное множество $F = \{f \in H\colon\ Uf = f\}$. Тогда для любого $f \in H$*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f \to Pf, \qquad n \to \infty. \tag{8.72}$$

Доказательство. Полагая $J := [\{g - Ug\colon\ g \in H\}]$, покажем, что $H = F \oplus J$. Это равносильно равенству $J^{\perp} = F$.

Заметим, что $h \in J^{\perp} \ \Rightarrow\ \langle h, g - Ug\rangle = 0$ для любого $g \in H$. Тогда

$$0 = \langle h, g - Ug\rangle = \langle h, g\rangle - \langle h, Ug\rangle = \langle h, g\rangle - \langle U^* h, g\rangle = \langle h - U^* h, g\rangle, \tag{8.73}$$

а это эквиалентно тому, что $U^* h = h$. Применяя условие $\|U\| \le 1$, имеем

$$\begin{aligned}\|Uh - h\|^2 = \langle Uh - h, Uh - h\rangle = \|Uh\|^2 - \langle h, Uh\rangle - \langle Uh, h\rangle + \|h\|^2 = \\ = \|Uh\|^2 - \langle U^* h, h\rangle - \langle h, U^* h\rangle + \|h\|^2 = \|Uh\|^2 - \|h\|^2 \le 0.\end{aligned} \tag{8.74}$$

Таким образом, $Uh = h \ \Rightarrow\ h \in F$.

Обратно, если $h \in F$, то для любого $g \in H$

$$\langle h, g - Ug\rangle = \langle h, g\rangle - \langle h, Ug\rangle = \langle h - U^* h, g\rangle = 0, \tag{8.75}$$

поскольку пространство F также U^*-инвариантно. В самом деле,

$$\|U^* g\|^2 = \langle U^* g, U^* g\rangle = \langle UU^* g, g\rangle \le \|UU^* g\|\,\|g\| \le \|U^* g\|\,\|g\| \ \Rightarrow\ \|U^* g\| \le \|g\| \tag{8.76}$$

для любого $g \in H$, а инвариантность F следует из рассуждений, аналогичных 8.74.

Итак, $H = F \oplus J$. Поэтому, в силу линейности, достаточно доказать сходимость средних для $f \in F$ и $f \in J$. При этом пространство F инвариантно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f = f \to f = Pf, \tag{8.77}$$

и нужно доказать, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f \to 0, \qquad f \in J. \tag{8.78}$$

Рассмотрим сначала случай $f = g - Ug$. Здесь

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f = \frac{1}{n}(g - U^n g), \tag{8.79}$$

значит,

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right\| \le \frac{2}{n}\|g\|, \quad \text{так как} \|U^n\| \le \|U\|^n \le 1. \tag{8.80}$$

Остается рассмотреть случай, когда элемент f аппроксимируется последовательностью $f_i = g_i - Ug_i$. Тогда

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right\| \le \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - f_i)\right\| + \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f_i\right\|. \tag{8.81}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем i и n_0 так, чтобы $\|f - f_i\| < \varepsilon/2$ и

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k f_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n \geq n_0. \tag{8.82}$$

Тогда, поскольку $\|U\| \leq 1$,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k (f - f_i) \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|U^k (f - f_i)\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|(f - f_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{8.83}$$

и 8.78 доказано. •

Перемешивание

Определение 8.5. Говорят, что автоморфизм T пространства Лебега $\boldsymbol{X}$ является *перемешивающим*, если $\mu(T^A \cap B) \to \mu(A)\mu(B)$ для любых измеримых множеств A и B.

Пусть Int — ортопроектор на пространство констант:

$$\mathrm{Int}\colon\ f \mapsto \int f \, d\mu. \tag{8.84}$$

Лемма 8.6. *Следующие свойства эквивалентны:*

1. *Автоморфизм T перемешивающий.*
2. $\langle T^k f, g \rangle \to 0$ *для любых* $f, g \in L^2(\boldsymbol{X})$, $\mathrm{Int}\, f = \mathrm{Int}\, g = 0$.
3. $T^k \to \mathrm{Int}$ *в слабой операторной топологии.*
4. $\int_{S^1} z^k \, d\sigma_h \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для любой спектральной меры* σ_h.

Доказательство. Докажем 1 $\Rightarrow$ 2. Приблизим функции f и g с нулевым средним линейными комбинациями φ и ψ индикаторов,

$$\varphi = \sum_\alpha a_\alpha 1_{A_\alpha}, \qquad \psi = \sum_\beta b_\beta 1_{B_\beta}, \tag{8.85}$$

тогда

$$\left| \langle T^{k_j} f, g \rangle \right| \leq \left| \langle T^{k_j} f, g \rangle - \langle T^{k_j} \varphi, \psi \rangle \right| + \left| \langle T^{k_j} \varphi, \psi \rangle \right| \leq \|f - \varphi\| \cdot \|g\| + \|\varphi\| \cdot \|g - \psi\| + \left| \langle T^{k_j} \varphi, \psi \rangle \right|. \tag{8.86}$$

Первые два слагаемых малы, так как ϕ и ψ близки к f и g, и $\|\varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi - f\| = O(1)$. Далее, сумма

$$\left| \langle T^{k_j} \varphi, \psi \rangle \right| \leq \sum_{\alpha, \beta} |a_\alpha \overline{b}_\beta| \, |\langle T^{k_j} 1_{A_\alpha}, 1_{B_\beta} \rangle - \langle 1_{A_\alpha}, 1_{B_\beta} \rangle| \tag{8.87}$$

также мала при больших j, покольку для каждой пары множеств A_α, B_β когда-нибудь ¡¡наступит¿¿ перемешивание, а пар конечное число.

Импликация $2 \Rightarrow 1$ тривиальна.

Равносильность 2 и 3 следует из формулы

$$\langle T^k f, g\rangle = \langle T^k(f - \operatorname{Int} f), (g - \operatorname{Int} g)\rangle + \langle T^k \operatorname{Int} f, (g - \operatorname{Int} g)\rangle^{(\text{это } 0)} + \langle T^k f, \operatorname{Int} g\rangle \to \\ \to 0 + \langle T^k f, 1\rangle \cdot \operatorname{Int} g = \operatorname{Int} f \cdot \operatorname{Int} g = \langle \operatorname{Int} f, g\rangle. \quad (8.88)$$

Далее, очевидно, что 4 следует из 2 (см. определение σ_h).

Установим $4 \Rightarrow 2$. Легко проверить, что

$$\langle T^k f, g\rangle = \\ = \frac{\langle T^k(f+g), f+g\rangle + i\langle T^k(f+ig), f+ig\rangle - \langle T^k(f-g), f-g\rangle - i\langle T^k(f-ig), f-ig\rangle}{4}. \quad (8.89)$$

Значит, достаточно проверять слабое перемешивание на парах (h_j, h_j), где $h_j = f + i^j g$. Предположим, что имеет место свойство 4, т. е.

$$\int_{S^1} z^k \, d\sigma_{h_j} = \langle T^k h_j, h_j\rangle \to 0, \quad (8.90)$$

тогда и $\langle T^k f, g\rangle \to 0$. •

Слабое перемешивание

Определение 8.7. Автоморфизм T пространства Лебега $\boldsymbol{X}$ называется *слабо перемешивающим*, $T \in \mathrm{WMix}$, если для любых измеримых множеств A и B

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left|\mu(T^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)\right| \to 0, \qquad n \to \infty. \quad (8.91)$$

Лемма 8.8. *Следуюие условия эквивалентны:*

1. $T \in \mathrm{WMix}$.
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\#\left\{0 \le k < n\colon\ |\mu(T^k A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| > \varepsilon\right\}}{n} = 0.$
3. *Существует последовательность индексов* $k_j \to \infty$: $\forall\, A, B \in \mathcal{A} \quad \mu(T^{k_j} A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.
4. $\exists\, k_j \to \infty$: $T^{k_j} \to \operatorname{Int}$ *в слабой операторной топологии.*
5. *Спектр T непрерывен, т. е. T не имеет собственных функций, кроме* 1.
6. *Джойнинг $\mu \times \mu$ эргодичен относительно $T \times T$.*

Доказательство. Свойства, перечисленные в формулировке можно разделить на 2 группы: первые 4 свойства образуют ¡¡динамическую¿¿ часть, последние 2 — спектральную.

Мы построим доказательство следующим образом. Сначала продемонстрируем самую простую импликацию — то, как из динамических свойств следует непрерывность спектра. Затем установим эквивалентность в каждой группе, и наконец, докажем, что из непрерывности спектра следует слабое перемешивание.

Итак, пусть, например, $T^{k_j} \to \mathrm{Int}$ для некоторой последовательности k_j. Предположим, что f — собственная функция T, тогда

$$|\langle T^{k_j} f, f\rangle| = |\langle \lambda^{k_j} f, f\rangle| = |\langle f, f\rangle| \not\to 0, \tag{8.92}$$

так как $|\lambda| = 1$ для любого собственного значения λ. Значит, спектр непрерывен.

Докажем эквивалентность свойств 1–4.

Плотностью множества $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ (или $\mathbb{Z}_+$) называется величина

$$\mathbf{b}(\mathcal{N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#(\mathcal{N} \cap [1, n])}{n}. \tag{8.93}$$

Лемма 8.9. *Пусть c_n — ограниченная последовательность комплексных чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 = 0$*;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |c_k| = 0$*;*

3) $\exists \mathcal{N}_0 \quad \mathbf{b}(\mathcal{N}_0) = 0$ *и* $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin\mathcal{N}_0}} c_n = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено свойство 1).
Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)-1} |c_n|^2 < \varepsilon. \tag{8.94}$$

Тогда, применяя неравенство Чебышевского типа, имеем

$$\rho^{(2)}_{\sqrt{\varepsilon}, N(\varepsilon)} := \frac{\#\{0 \le n < N(\varepsilon)\colon\ |c_n|^2 > \sqrt{\varepsilon}\}}{n} < \sqrt{\varepsilon}. \tag{8.95}$$

В самом деле,

$$\varepsilon > \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)-1} |c_n|^2 > \frac{1}{n} \sum_{\{|c_n|^2 > \sqrt{\varepsilon}\}} |c_n|^2 > \frac{1}{n} \#\{|c_n|^2 > \sqrt{\varepsilon}\} \cdot \sqrt{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \rho^{(2)}_{\sqrt{\varepsilon}, N(\varepsilon)} < \sqrt{\varepsilon}. \tag{8.96}$$

Построим последовательность $1 > \varepsilon_k \to 0$ так, чтобы $N(\varepsilon_1) < N(\varepsilon_2) < \ldots$. И пусть, по определению,

$$\mathcal{N}_0 \cap [N(\varepsilon_{k-1}), N(\varepsilon_k)) = \{n\colon\ |c_n|^2 > \sqrt{\varepsilon_k}\}. \tag{8.97}$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{N}_0\cap[0,N(\varepsilon_k))}{n}<\frac{\sum\limits_{j\le k}(N(\varepsilon_k)-N(\varepsilon_{k+1}))\sqrt{\varepsilon_j}}{n}<$$
$$<\frac{\sum\limits_{j<k_0}(N(\varepsilon_k)-N(\varepsilon_{k+1}))\sqrt{\varepsilon_j}+\sum\limits_{k0\le j\le k}(N(\varepsilon_k)-N(\varepsilon_{k+1}))\sqrt{\varepsilon_j}}{n}<$$
$$<\frac{N(\varepsilon_{k_0})+(n-N(\varepsilon_{k_0}))\sqrt{\varepsilon_{k_0}}}{n}\to 0, \quad (8.98)$$

так как $\varepsilon_k\to 0$ и $n\gg N(\varepsilon_{k_0})$ (фиксируя k_0, устремляем n к бесконечности). Значит, $\mathbf{b}(\mathcal{N}_0)=0$.

Пусть теперь $\mathbf{b}(\mathcal{N}_0)=0$. Тогда как 1), так и 2) следуют из ограниченности последовательности c_n.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) почти очевидна, действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|^2\le\sup_n|c_n|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|=0, \quad (8.99)$$

что и требовалось доказать. •

Из доказанной леммы следует эквивалентность свойств 1, 2, 3 исходного утверждения.

Действительно, зафиксируем базис $\{A_\alpha\}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ и положим

$$a_k=\sum_{\alpha,\,\beta\,=\,1}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\big|\mu(T^kA_\alpha\cap A_\beta)-\mu(A_\alpha)\mu(A_\beta)\big|. \quad (8.100)$$

Наша цель — доказать, что из слабого перемешивания следует сходимость

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\to 0. \quad (8.101)$$

Выберем $p\ge 1$ так, чтобы

$$\sum_{k>p}\frac{k}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.102)$$

Тогда

$$\sum_{\alpha+\beta\,>\,p}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\le\sum_{k\,=\,p+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2^k}\right)\le\sum_{k\,=\,p+1}^{\infty}\frac{k}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}, \quad (8.103)$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha,\,\beta\,=\,1}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\big|\mu(T^kA_\alpha\cap A_\beta)-\mu(A_\alpha)\mu(A_\beta)\big| \quad (8.104)$$

можно представить в виде двух сумм:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha,\,\beta\,\le\,p}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\big|\mu(T^kA_\alpha\cap A_\beta)-\mu(A_\alpha)\mu(A_\beta)\big| \quad (8.105)$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta>p}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\big|\mu(T^kA_\alpha\cap A_\beta)-\mu(A_\alpha)\mu(A_\beta)\big|, \tag{8.106}$$

первая из которых стремится к 0 в силу слабого перемешивания, а вторая меньше ε. По лемме 8.9 найдётся множество $\mathcal{N}_0$ нулевой плотности (разумеется, не зависящее от α и β), такое, что

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ k\notin\mathcal{N}_0}} a_k=0, \tag{8.107}$$

следовательно,

$$\big|\mu(T^kA_\alpha\cap A_\beta)-\mu(A_\alpha)\mu(A_\beta)\big|\le 2^{\alpha+\beta}a_k\to 0,\qquad k\to\infty. \tag{8.108}$$

Равносильность свойств 3 и 4 доказывается также, как и в лемме 8.6.

Наконец, проверим эквивалентность свойств 5 и 6. Множество собственных значений — группа. Для каждого собственного вектора f с собственным значением λ найдётся собственный вектор, а именно $\overline{f}$, отвечающий λ^{-1}. Значит, функция $f(x)\overline{f}(y)\in L^2(\mu\times\mu)$ является (отличным от 1!) собственным вектором преобразования $T\times T$, что эквивалентно неэргодичности $T\times T$.

Докажем теперь, что из непрерывности спектра следует слабое перемешивание.

Лемма 8.10. *Пусть $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ — атомы меры σ на окружности $S^1=\{|z|=1\}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\widehat{\sigma}_k|^2=\sum_m\sigma(\lambda_m)^2,\qquad \widehat{\sigma}_k:=\int_{S^1}z^k\,d\sigma. \tag{8.109}$$

Доказательство. Пусть

$$F_n(z_1,z_2)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(z_1\overline{z}_2)^k. \tag{8.110}$$

Заметим, что $|F_n|\le 1$ и

$$F_n(z_1,z_2)=\begin{cases}\frac{1}{n}\frac{(z_1\overline{z}_2)^n-1}{z_1\overline{z}_2-1}, & z_1\ne z_2,\\ 1, & z_1=z_2,\end{cases} \tag{8.111}$$

откуда $F_n(z_1,z_2)\to 0$, $n\to\infty$, везде, кроме диагонали $\Delta=\{z_1=z_2\}$, где $F_n(z_1,z_2)\equiv 1$.

Итак,

$$|\widehat{\sigma}_k|^2=\int z_1^n\,\sigma(dz_1)\overline{\int z_2^n\,\sigma(dz_2)}, \tag{8.112}$$

иммем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\widehat{\sigma}_k|^2=\iint_{S^1\times S^1}F_n(z_1,z_2)\,(\sigma\times\sigma)(dz_1,dz_2). \tag{8.113}$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{\sigma}_k|^2 = \int_{\Delta} (\sigma \times \sigma)(dz_1, dz_2) = \sum_m \sigma(\lambda_m)^2. \tag{8.114}$$

(Применяется теорема Лебега о мажорируемой сходимости.) •

Таким образом, из непрерывности спектральных мер следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle T^k h, h\rangle = 0 \tag{8.115}$$

для любого $h \in L^2(\boldsymbol{X})$. Применяя рассуждения, аналогичные выкладкам из доказательства леммы 8.6, находим множкства нулевой плотности $\mathcal{N}_j$, такие, что

$$\lim {}_{n\notin\mathcal{N}_j}^{n\to\infty} \langle T^k h_j, h_j\rangle = 0, \qquad h_j = f + i^j g. \tag{8.116}$$

Значит,

$$\lim {}_{n\notin\mathcal{N}}^{n\to\infty} \langle T^k f, g\rangle = 0, \qquad \mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cup \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3, \tag{8.117}$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle T^k f, g\rangle = 0, \tag{8.118}$$

т.е. выполнено свойство 1. •

Упражнение 8.11. Докажите, что T является слабо перемешивающим $\iff$ слабое замыкание множества джойнингов $\Delta_k(A \times B) := (T^k \times \mathrm{id})\Delta$ содержит джойнинг $\mu \times \mu$.

Упражнение 8.12. Докажите, что T является слабо перемешивающим $\iff$ для каждого f множество $\{T^k f\}$ является слабо предкомпактным.

Упражнение 8.13. Докажите, что из свойства слабого перемешивания следует эргодичность T^n при всех $n \neq 0$.

Упражнение 8.14. Приведите пример слабоперемешивающего преобразования, не являющегося перемешивающим.

Упражнение 8.15. Приведите пример автоморфизма T такого, что $T^{k_j} \to \mathrm{Int}$ и $T^{l_j} \to 1$.