Лекция 1

Универсальная обёртывающая алгебра

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Структуру алгебры Ли на пространстве $< x_1, \ldots, x_n >$ можно задать при помощи набора *структурных констант* c_{ij}^k, задающих разложение по базису коммутаторов базисных элементов:

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k.$$

Рассмотрим какое-нибудь (конечномерное) представление $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Образами базисных элементов $x_1, \ldots, x_n$ будут являться линейные операторы на пространстве представления $X_1, \ldots, X_n \in \operatorname{End} V$. На $\operatorname{End} V$ есть структура ассоциативной алгебры — обычное умножение операторов. Очевидно, что X_i, рассматриваемые как операторы на V, будут удовлетворять соотношению

$$X_i X_j - X_j X_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k.$$

Оказывается, что с $\mathfrak{g}$ можно связать ассоциативную алгебру $U(\mathfrak{g})$ так, что для любого представления $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ построенное действие на V ассоциативной алгебры, порождённой образами базисных элементов $\mathfrak{g}$, будет представлением алгебры $U(\mathfrak{g})$. Эта алгебра строится следующим образом.

Рассмотрим тензорную алгебру пространства $\mathfrak{g}$:

$$T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus T^{\otimes k}\mathfrak{g} \oplus \ldots.$$

Это свободная ассоциативная алгебра от n образующих. Теперь рассмотрим все её элементы вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x, y \in \mathfrak{g})$. Ими порождается двусторонний идеал I в $T(\mathfrak{g})$.

Определение. *Универсальной обертывающей алгеброй* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется алгебра $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$.

Имеется каноническое вложение $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$ (на уровне линейных пространств). Кроме того, $U(\mathfrak{g})$, как и любую другую ассоциативную алгебру, можно превратить в алгебру Ли $U(\mathfrak{g})_L$, положив $[A, B] = AB - BA$.

Задача 1. Доказать, что $i : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})_L$ — гомоморфизм алгебр Ли.

Задача 2. Пусть $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что его можно продолжить до представления ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$. При этом подпространство $W \subset V$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $U(\mathfrak{g})$. В частности, неприводимость относительно $\mathfrak{g}$ эквивалентна неприводимости относительно $U(\mathfrak{g})$.

Задача 3. Пусть A — ассоциативная алгебра, $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow A_L$ — гомоморфизм алгебр Ли. Доказать, что существует $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$, «продолжающий» φ.

Пример. Пусть $\mathfrak{g}$ — коммутативная алгебра Ли. Тогда $U(\mathfrak{g})$ — это симметрическая алгебра $S(\mathfrak{g})$ пространства $\mathfrak{g}$ (или, что то же самое, алгебра $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ многочленов на $\mathfrak{g}^*$).

Алгебра $U(\mathfrak{g})$ не является градуированной, зато на ней можно ввести *фильтрацию*, т.е. выделить набор множеств U_i таких, что $U_1 \subset U_2 \subset \dots U_i \subset \dots$, $U_iU_j \subset U_{i+j}$ и $U = \bigcup_{i \geq 0} U_i$, положив

$$U_k = \bigoplus_{i \leq k} T^{\otimes i}\mathfrak{g} \mod I.$$

По фильтрованной алгебре можно построить градуированную:

$$\mathrm{gr}\; U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} U_i/U_{i-1}.$$

Теорема 1 (Пуанкаре-Биркгоф-Витт) *Вложение $i : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{gr}\; U(\mathfrak{g})$ продолжается до изоморфизма ассоциативных алгебр $i : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{gr}\; U(\mathfrak{g})$.*

Задача 4. Доказать теорему Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Задача 5. Рассмотрим отображение $symm : S(\mathfrak{g}) \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$, $X_1 \dots X_k \mapsto \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} X_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(k)}$. Доказать, что сквозное отображение $S(\mathfrak{g}) \hookrightarrow T(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ — изоморфизм линейных пространнств.

Задача 6. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Тогда $\{x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n} | k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ — базис в $U(\mathfrak{g})$.

Задача 7. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$ — алгебра с базисом X, Y, Z и соотношениями $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. Согласно предыдущей задаче, $X^kY^lZ^p$ — базис $U(\mathfrak{g})$. Выразить $X^kY^lZ^p \cdot X^mY^nZ^q$ через базисные элементы.

Задача 8. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы (как линейных пространств) двух своих подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Доказать, что $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_1) \otimes U(\mathfrak{g}_2)$.

Скобка Пуассона

Пусть x и y — элементы $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ степеней m и n соответственно. Возьмём какие-нибудь прообразы этих элементов $\tilde{x}, \tilde{y} \in U(\mathfrak{g})$. Их коммутатор $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ лежит в U_{m+n-1}. Рассмотрим его образ в $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$.

Определение. *Скобкой Пуассона* элементов $x, y \in \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ называется элемент $\{x, y\} = [\tilde{x}, \tilde{y}] \mod U_{m+n-2} \in \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$.

Задача 9. Проверить корректность этого определения.

Задача 10. Доказать, что $\{\cdot, \cdot\}$ — билинейная антисимметрическая операция, удовлетворяющая тождеству Якоби (т.о., $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ превращается в алгебру Ли).

Задача 11. Доказать, что на этой алгебре Ли есть $\mathbb{Z}$-градуировка, полученная сдвигом на единицу градуировки $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ как ассоциативной алгебры.

Задача 12. Доказать *правило Лейбница:* $\{x, yz\} = \{x, y\}z + y\{x, z\}$.

Задача 13. $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как пространство многочленов на $\mathfrak{g}^*$. Выразить скобку Пуассона через структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. (Ответ: $\{f, g\} = \sum_{i,j,k} c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$.)

Задача 14. Вычислить скобки Пуассона на $\mathfrak{hei}(3)$, $\mathfrak{so}(3)$.

Аналитическое определение $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$

Пусть G —группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, A — алгебра обобщенных функций на G с носителем в единице и операцией свертки:

$$< \varphi * \psi, f > = < \varphi, \tilde{f} >, \text{ где } \tilde{f}(g) = < \psi, l_g f >; \ (l_g f)(g_1) = f(g^{-1} g_1).$$

Если понимать алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли левоинвариантных векторных полей на группе G, то возникает вложение

$$i : \mathfrak{g} \longrightarrow A; \quad < i(X), f > = Xf(e), \ X \in \mathfrak{g}.$$

Задача 15. Доказать *теорему Шварца:* $A \cong U(\mathfrak{g})$.

Индуцированные представления

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $W \subset V$ — какой-то $\mathfrak{h}$-модуль.

Определение. Модулем алгебры $\mathfrak{g}$, индуцированным модулем W, называется

$$ind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} W = ind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \tau = ind(W, \mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} W.$$

Символ $\underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes}$ означает, что для $g \in U(\mathfrak{g}), h \in U(\mathfrak{h}), w \in W$ элемент $gh \otimes w$ отождествляется с $g \otimes hw$.

Пусть $V = ind(W, \mathfrak{g})$; а $i : W \longrightarrow V,\ w \mapsto 1 \otimes w$ — естественное вложение.

Задача 16. Доказать, что i — гомоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей.

Задача 17. Доказать, что $V = ind(W, \mathfrak{g})$ порождается как $\mathfrak{g}$-модуль подпространством W.

Задача 18. Доказать, что вложение $i : W \longrightarrow V$ универсально, т.е.

1. Если V' — другой $\mathfrak{g}$-модуль и $\psi : W \longrightarrow V'$ есть $\mathfrak{h}$-гомоморфизм, то существует и единствен гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей $\varphi : V \longrightarrow V'$, такой что $\varphi(i(w)) = \psi(w)$. При этом отображение $\psi \mapsto \varphi$ задает биекцию между $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(W, V')$ и $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V')$. В частности, любой неприводимый $\mathfrak{g}$-модуль, ограничение которого на $\mathfrak{h}$ содержит W в качестве подмодуля, является фактором индуцированного модуля $ind(W, \mathfrak{g})$.

2. Если $\psi : W \longrightarrow W'$ — гомоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей, то существует и единствен гомоморфизм $\varphi : V \longrightarrow V'$ индуцированных модулей $V = ind(W, \mathfrak{g})$ и $V' = ind(W', \mathfrak{g})$, такой что $\varphi(i(w)) = i(\psi(w))$.

3. Если, кроме того, гомоморфизм ψ есть вложение, то φ — тоже вложение, причем $V \cap W' = W$ и $V'/V \cong ind(W'/W, \mathfrak{g})$.

4. Если $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ — две подалгебры, то $ind_{\mathfrak{h}_1}^{\mathfrak{g}} W = ind_{\mathfrak{h}_2}^{\mathfrak{g}} ind_{\mathfrak{h}_1}^{\mathfrak{h}_2} W$.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$, $\mathfrak{h} = Span\{Y, Z\}$. $\mathfrak{g}$ как линейное пространство представляется в виде прямой суммы $\mathfrak{g} = \mathbb{C}X \oplus \mathfrak{h}$. Поскольку $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли, любое её неприводимое представление одномерно. Пусть W — такое представление с базисным элементом w. Дополнительно предположим, что Z действует на w ненулевым образом: $Zw = \lambda w$. Заменой базиса Y можно подобрать так, чтобы $Yw = 0$.

Рассмотрим представление, индуцированное представлением W.

$$V_\lambda = ind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} W = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} W = (U(\mathbb{C}X) \otimes U(\mathfrak{h})) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} W) \cong U(\mathbb{C}X) \otimes W \cong \mathrm{Pol}(X) \otimes W \cong \mathrm{Pol}(X)$$

В индуцированном представлении имеется базис, состоящий из элементов $w, Xw, X^2w, \ldots$. Вычислим, как действуют X, Y, Z на элементы этого базиса.

$$X: \quad w \mapsto Xw,\ Xw \mapsto X^2w,\ \ldots,\ X^n w \mapsto X^{n+1}w;$$

$$Z: \quad w \mapsto \lambda w,\ Xw \mapsto \lambda Xw,\ \ldots,\ X^n w \mapsto ZX^n w = X^n Zw = \lambda X^n w;$$

$$Y: \quad w \mapsto 0,\ YXw = XYw - Zw = -\lambda w.$$

Воспользовавшись равенством $[Y, X^n] = -nX^{n-1}Z$ (докажите его!), получаем:

$$Y(X^n w) = X^n Y w - nX^{n-1}ZW = -\lambda n X^{n-1} w = -\lambda \frac{\partial}{\partial X} X^n w.$$

Значит, индуцированный модуль V_λ есть пространство многочленов от X, где алгебра $\mathfrak{hei}(3)$ действует так:

$$X: f \mapsto Xf; \quad Z: f \mapsto \lambda f; \quad Y: f \mapsto -\lambda \frac{\partial f}{\partial X}.$$

Задача 19.

1. Доказать, что полученный модуль V_λ неприводим.

2. Доказать, что любой неприводимый $\mathfrak{hei}(3)$-модуль, где Y действует локально нильпотентно (т.е. для любого $v \in V$, $Y^N v = 0$ при некотором $N = N(v)$), либо одномерен, либо изоморфен V_λ при некотором λ.