Лекция 2

Модуль Верма

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Для неё имеет место треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{h}$ — картановская, а $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ — нильпотентные подалгебры. Подалгебра $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ называется *борелевской*; это максимальная разрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$, причём $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{n}_+$.

Рассмотрим произвольный линейный функционал Λ на $\mathfrak{h}$. Ему отвечает одномерное представление $V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda$ алгебры $\mathfrak{b}$:

$$hv_\Lambda = \Lambda(h)v_\Lambda, \qquad \mathfrak{n}_+ v_\Lambda = 0.$$

Определение. *Модулем Верма* называется индуцированный $\mathfrak{g}$-модуль $M^\Lambda = ind_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} V_\Lambda$. При этом модуль V_Λ канонически вкладывается в M^Λ: $v_\Lambda \mapsto 1 \otimes v_\Lambda$.

Пусть V — произвольный конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль.

Определение. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *особым* (или *примитивным*) с особым весом λ, если

$$hv = \lambda(h)v, \qquad \mathfrak{n}_+ v = 0.$$

Если, кроме того, $U(\mathfrak{g})v = V$, то v называется *старшим вектором.*

Замечание. Если V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль (а значит, и $\mathfrak{b}$-модуль), то по теореме Ли существует такой вектор $v_\Lambda \in V$, что $\mathbb{C}v_\Lambda$ является $\mathfrak{b}$-инвариантным подпространством. Иными словами, в пространстве любого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля существует хотя бы один особый вектор. Если V к тому же неприводим, то в нем существует и единствен старший вектор.

Строение M^Λ

Пусть $\Delta^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ — множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$, а $f_{\beta_1}, \dots, f_{\beta_n}$ — множество корневых векторов, образующих базис в $\mathfrak{n}_-$. Пусть, кроме того, $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $k = \mathrm{rk}\ \mathfrak{g}$ — соответствующая система простых корней.

Воспользуемся тем, что $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{b})$:

$$M^\Lambda = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} V_\Lambda \cong U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{b}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} V_\Lambda \cong U(\mathfrak{n}_-) \otimes V_\Lambda.$$

По теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта базис в $U(\mathfrak{n}_-)$ состоит из всевозможных элементов вида $f_{\beta_1}^{k_1}\dots f_{\beta_n}^{k_n}$, где $k_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Каждый из этих базисных элементов является весовым вектором с весом $-\sum k_i\beta_i$. Положительные корни β_i можно, в свою очередь, разложить по простым корням. Тогда $-\sum k_i\beta_i = -\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}} m_i\alpha_i$, где $m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Положим $D(\Lambda)=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*|\lambda=\Lambda-\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}} m_i\alpha_i,\ m_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Мы получили весовое разложение для $U(\mathfrak{n}_-)$:

$$U(\mathfrak{n}_-)=\bigoplus_{\lambda\in D(0)} U(\mathfrak{n}_-)_\lambda.$$

Отсюда получается весовое разложение для модуля Верма:

$$M^\Lambda=\bigoplus_{\lambda\in D(\Lambda)} M^\Lambda_\lambda.$$

Выясним, чему равны размерности весовых подпространств $U(\mathfrak{n}_-)$ и M^Λ.

Определение. *Функцией Костанта* называется функция $P(\lambda)$, $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, определённая следующим образом: значение $P(\lambda)$ равно числу способов представить λ в виде суммы положительных корней. В частности, $P(0)=1$, $P(\alpha_i)=1$.

Тогда получается, что $\dim U(\mathfrak{n}_-)_{-\lambda}=\dim M^\Lambda_{\Lambda-\lambda}=P(\lambda)$.

Категория $\mathcal{O}$

Определение. Говорят, что $\mathfrak{g}$-модуль V принадлежит *категории* $\mathcal{O}$, если:

1. $V=\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$;
2. $\dim V_\lambda<\infty$ для всех весов λ;
3. Множество весов лежит в объединении конечного числа множеств вида $D(\Lambda)$.

Замечание. Ясно, что если e_α — корневой вектор, то $e_\alpha V_\lambda\subset V_{\lambda+\alpha}$

Задача 1. Доказать, что все конечномерные модули, модули со старшим весом, модули Верма принадлежат категории $\mathcal{O}$.

Задача 2. Подмодуль и фактормодуль модуля из категории $\mathcal{O}$ принадлежат категории $\mathcal{O}$.

Задача 3. Если модуль V принадлежит категории $\mathcal{O}$, то в V существует хотя бы один особый вектор.

Задача 4.

1. Для любого веса $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ найдётся единственный неприводимый модуль L^Λ со старшим весом Λ. (Он получается из M^Λ факторизацией по максимальному собственному подмодулю);

2. $L^{\Lambda_1} \cong L^{\Lambda_2}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_1 = \Lambda_2$;

3. Любой неприводимый модуль из категории $\mathcal{O}$ имеет вид L^Λ;

4. Если $V \in \mathcal{O}$, то любой элемент из $\mathfrak{n}_+$ действует в V локально нильпотентно.

Для того, чтобы построить неприводимый модуль с данным старшим весом Λ, нужно взять соответствующий модуль Верма M^Λ, найти в нём особые векторы $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (то есть весовые векторы, которые обращаются в нуль под действием $\mathfrak{n}_+$) и отфакторизовать M^Λ по образу проекции $M^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus M^{\lambda_s} \longrightarrow M^\Lambda$. Далее ту же процедуру следует проделать с полученным фактормодулем, и т.д.

Для конечномерной полупростой алгебры Ли весь процесс завершается за один шаг. Однако и само понятие модуля Верма, и описанный метод построения неприводимых модулей применимы и к более широкому классу алгебр Ли, а именно к тем, которые допускают треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, и при этом все их корневые подпространства конечномерны.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ со стандартным базисом f, h, e. Борелевская подалгебра $\mathfrak{b} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$. Тогда вес модуля Верма может быть произвольным комплексным числом, а сам модуль Верма устроен так:

$$M^\Lambda = U(\mathfrak{n}_-) \otimes V_\Lambda = \mathbb{C}[f] \otimes V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda \oplus \mathbb{C}fv_\Lambda \oplus \mathbb{C}f^2 v_\Lambda \oplus \dots$$

Найдём в этом модуле особые векторы. Для этого решим уравнение $ef^k v_\Lambda = 0$:

$$ef^k v_\Lambda = f^k e v_\Lambda + kf^{k-1}(h - (k-1))v_\Lambda = kf^{k-1}(\Lambda - (k-1))v_\Lambda = 0,$$

откуда $\Lambda = k-1$. Значит, если $\Lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то M^Λ неприводим, т.к. особых векторов в нём нет.

Если же $\Lambda = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то $k = n+1$. Вектор $f^{n+1}v_\Lambda$ будет особым с весом $\Lambda - 2(n+1) = -n-2$. Мы получаем вложение $M^{-n-2} \hookrightarrow M^n$. Фактормодуль M^n/M^{-n-2} будет конечномерным представлением со старшим весом n.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — произвольная полупростая алгебра Ли с системой образующих e_i, $f_i\, h_i$, $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — система простых корней, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ — функционал на картановской подалгебре.

Лемма 1 *Если $\Lambda(h_i) = n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то $f_i^{n_i+1}v_\Lambda$ — особый вектор модуля Верма M^Λ.*

Доказательство. Нужно проверить, что $\mathfrak{n}_+(f_i^{n_i+1}v_\lambda) = 0$. Достаточно проверить, что $e_j(f_i^{n_i+1}v_\lambda) = 0$.

Если $j \neq i$, то $[f_i, e_j] = 0$, откуда $e_j(f_i^{n_i+1}v_\Lambda) = f_i^{n_i+1}e_jv_\Lambda = 0$.

Если же $j = i$, то доказательство дословно повторяет рассуждение из предыдущего примера. $\square$

Следствие 2 *В предыдущих обозначениях, в L^Λ справедливы соотношения типа Серра: $f_i^{n_i+1}v_\Lambda = 0$.*

Замечание. Пусть $n_i = \Lambda(h_i) = \frac{2(\Lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \in \mathbb{Z}$. Тогда вес вектора $f_i^{n_i+1}$ равен $\lambda = \Lambda - (n_i+1)\alpha_i = \Lambda - \frac{2(\Lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i - \alpha_i$.

Если обозначить через s_i элемент группы Вейля, задающий отражение относительно гиперплоскости, ортогональной простому корню α_i, то эта формула запишется так: $\lambda = s_i(\Lambda) - \alpha_i$.

Пусть $\rho = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ — полусумма положительных корней. Легко видеть, что $s_i(\rho) = \rho - \alpha_i$, откуда получаем окончательную формулу для λ:

$$\lambda + \rho = s_i(\Lambda) + \rho - \alpha_i; \quad \lambda = s_i(\Lambda+\rho) - \rho.$$

В $\mathfrak{g}$ можно рассмотреть подалгебру $< e_i, f_i, h_i > \cong \mathfrak{sl}(2)$. Если $\dim L^\Lambda < \infty$, то v_Λ будет особым вектором представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ веса $\Lambda(h_i)$, откуда $\Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Такие веса (у которых все числовые отметки — целые неотрицательные числа) называются *доминантными*.

Пусть Λ — доминантный вес. Рассмотрим модуль

$$A^\Lambda = M^\Lambda / \bigcup_{i=1,\ldots,\mathrm{rk}\ \mathfrak{g}} M^{s_i(\Lambda+\rho)-\rho}.$$

Задача 5. Доказать, что $\dim A^\Lambda < \infty$.

Задача 6. Доказать, что $A^\Lambda = L^\Lambda$.

Задача 7. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли ранга 2, V — присоединённый модуль. Найти его старший вес Λ, нарисовать весовую диаграмму модуля Верма M^Λ, отметить особые веса λ в M^Λ и весовые диаграммы образов модулей Верма M^λ.

Лемма 3 *Пусть V — конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда для любого веса $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и любого элемента $w \in W$ группы Вейля имеет место равенство* $\dim V_\lambda = \dim V_{w(\lambda)}$.

Доказательство. Поскольку группа Вейля порождается простыми отражениями s_i, утверждение леммы достаточно проверить для $w = s_i$.

Пусть $\lambda(h_i) = k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $s_i\lambda(h_i) = -k$.

Положим $V_j = \{v \in V | h_i v = jv\}$. По свойству конечномерных $\mathfrak{sl}(2)$-модулей, отображения $f_i^k : V_k \longrightarrow V_{-k}$ и $e_i^k : V_{-k} \longrightarrow V_k$ будут изоморфизмами линейных пространств.

Весовые подпространства V_λ и $V_{-\lambda}$ будут лежать в V_k и V_{-k} соответственно. Проверим, что отображение f_i^k переводит V_λ в $V_{s_i(\lambda)}$. Действительно,

$$f_i^k : \quad \lambda \mapsto \lambda - k\alpha_i = \lambda - 2\frac{(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i = s_i(\lambda).$$

Аналогично e_i^k переводит $V_{s_i(\lambda)}$ в V_λ, откуда и следует утверждение леммы.
$\square$