Лекция 3

Характер представления алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, V — $\mathfrak{g}$-модуль из категории $\mathcal{O}$.

Определение. *Характером* представления V называется многочлен

$$\mathrm{ch}\ V = \sum_{\lambda} (\dim V_\lambda) e^\lambda$$

от (формальных) экспонент весов модуля V.

Если $\dim V < \infty$, то $\mathrm{ch}\ V$ можно рассматривать как функцию на $\mathfrak{h}$ или на $\mathfrak{h}^*$. Ясно, что тогда $\dim V = (\mathrm{ch}\ V)(0)$.

Пример. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$, V — конечномерное представление со старшим весом n. Тогда веса этого представления имеют вид $n, n-2, \ldots, -n$, а характер представления записывается так:

$$\mathrm{ch}\ V = e^n + e^{n-2} + \cdots + e^{-n+2} + e^{-n} = \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e - e^{-1}}.$$

Задача 1. Пусть $V = V_1 \otimes V_2$. Доказать, что $\mathrm{ch}\ V = \mathrm{ch}\ V_1 \cdot \mathrm{ch}\ V_2$.

Пример. Вычислим характер модуля Верма M^Λ со старшим весом Λ.

$$M^\Lambda \cong U(\mathfrak{n}_-) \otimes V.$$

Базис $\mathfrak{n}_-$ составляют элементы $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_n}$, где $\{f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_n}\} = \Delta^+$ — система положительных корней.

$$U(\mathfrak{n}_-) \cong \mathbb{C}[f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_n}] \cong \mathbb{C}[f_{\beta_1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[f_{\beta_n}];$$

$$\mathrm{ch}\ \mathbb{C}[f_{\beta_i}] = e^0 + e^{-\beta_i} + e^{-2\beta_i} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-\beta_i}}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{ch}\ M^\Lambda = e^\Lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Умножим и разделим это равенство на e^ρ, где $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$:

$$\mathrm{ch}\ M^\Lambda = e^{\Lambda + \rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1}{e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}}.$$

Полученная формула для характера обычно записывается короче:

$$\mathrm{ch}\ M^{\Lambda} = K^{-1} e^{\Lambda+\rho}, \qquad \text{где} \quad K = \prod_{\alpha\in\Delta^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}.$$

Задача 2. Многочлен K является антиинвариантным относительно группы Вейля: $\forall w \in W \quad wK = (\det\ w)K$.

Лемма 1 *Для любого $V \in \mathcal{O}$ $\mathrm{ch}\ V = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} c_\lambda \mathrm{ch}\ M^\lambda$, где $c_\lambda \in \mathbb{Z}$. (Т.е. характер любого модуля из $\mathcal{O}$ есть целочисленная линейная комбинация характеров модулей Верма).*

Доказательство. Множество весов V лежит в объединении конечного числа множеств вида $D(\lambda)$. Выберем среди этих λ наибольший вес и обозначим его Λ. Пусть $\dim V_\Lambda = k$. Тогда можно рассмотреть гомоморфизм $\underbrace{M^\Lambda \oplus \cdots \oplus M^\Lambda}_{k \text{ слагаемых}} \longrightarrow V$. Обозначив за M его ядро, а за V' — фактор V по образу гомоморфизма, получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^\Lambda \oplus \cdots \oplus M^\Lambda \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0.$$

Следовательно (т.к. характер суммы представлений есть прямая сумма характеров), $\mathrm{ch}\ V = k\,\mathrm{ch}\ M^\Lambda + \mathrm{ch}\ V' - \mathrm{ch}\ M$.

Заметим, что V' и M суть модули из категории $\mathcal{O}$, и их весовые диаграммы лежат внутри весовой диаграммы модуля V, причем все входящие в эти диаграммы веса строго меньше Λ. Далее действуем по индукции, применяя описанный процесс к этим модулям. □

Непосредственно из этой леммы получается, что $\mathrm{ch}\ L^\Lambda = K^{-1} \sum_{\lambda\in D(\Lambda)} c_\lambda e^{\lambda+\rho}$.

Замечание. Если L^Λ конечномерен, то для любого λ, $\dim V_\lambda = \dim V_{w(\lambda)} \quad \forall w \in W$. Следовательно, $\mathrm{ch}\ L^\Lambda$ является W-инвариантом. Т.к. K есть W-антиинвариант, получаем, что сумма $\sum_{\lambda\in D(\Lambda)} c_\lambda e^{\lambda+\rho}$ также W-антиинвариантна.

Ясно, что в эту сумму слагаемое $e^{\Lambda+\rho}$ входит с коэффициентом $c_\Lambda = 1$. Значит, коэффициенты при $e^{w(\Lambda+\rho)}$ равны $\det\ w$. Далее мы докажем, что никаких других слагаемых в этой сумме нет.

Характер группы

1. Пусть G — связная односвязная группа Ли, а T — её неприводимое конечномерное представление. Тогда его дифференциал $\tau = dT$ будет представлением алгебры Ли $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Для представления (абстрактной) группы существует следующее понятие характера:

Определение. *Характер группы представления* T — это функция на группе G, равная $(\mathrm{ch}_G T)(g) = \mathrm{tr}\ T(g)$.

Задача 3. Выяснить связь между $\mathrm{ch}\ \tau$ и $\mathrm{ch}_G T$. Насколько они определяют друг друга?

Инфинитезимальный характер группы

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Если τ — неприводимое представление алгебры $U(\mathfrak{g})$, то элемент центра $z \in Z(\mathfrak{g})$ действуют в пространстве представления операторами, пропорциональными единичному: $\tau(z) = \chi(z)\cdot 1$. Возникает гомоморфизм ассоциативных алгебр $\chi : Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$. Гомоморфизм χ называется *инфинитезимальным характером* представления T группы Ли G (или представления τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$).

Задача 4. Поскольку z есть элемент $U(\mathfrak{g})$, его можно интерпретировать как обобщённую функцию на группе G с носителем в единице. Доказать, что $\chi(z) = \frac{<z, \mathrm{ch}_G T>}{\dim T}$.

Элементы $Z(\mathfrak{g})$ называются элементами Казимира (или просто казимирами).

Оператор Казимира

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. На ней определена *форма Картана-Киллинга* $(\cdot,\cdot)_{KK}$. Это $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент $S^2\mathfrak{g}^* \subset T^2\mathfrak{g}^*$.

Форма Картана-Киллинга устанавливает изоморфизм $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$. Этот изоморфизм позволяет отождествить $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ и $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}$ — пространство линейных операторов на $\mathfrak{g}$. В нём форме Картана-Киллинга соответствует единичный оператор.

Аналогично можно отождествить $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. При этом $(\cdot,\cdot)_{KK} \mapsto z_{KK} \in U(\mathfrak{g})_2 \cap Z(\mathfrak{g})$.

Задача 5. Если $\mathfrak{g}$ проста, то z_{KK} — единственный (с точностью до пропорциональности) элемент второго порядка, лежащий в $Z(\mathfrak{g})$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — два базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$, биортогональные относительно формы Картана-Киллинга, т.е. $(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. (здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ — это форма Картана-Киллинга, других скалярных произведений мы рассматривать не будем).

Задача 6. $z_{KK} = \sum\limits_i x_i y_i$.

Возьмём в $\mathfrak{g}$ базис, состоящий из e_α, отнормированных так, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ (т.е. $e_{-\alpha}$ отличаются от f_α на некий коэффициент) и стандартного базиса h_i картановской подалгебры $\mathfrak{h}$. Также рассмотрим базис $h^i \in \mathfrak{h}$, биортогональный к h_i. Согласно предыдущей задаче,

$$z_{KK} = \sum_i h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta^+} (e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha).$$

Заметим, что $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h^\alpha$. Отсюда получаем:

$$z_{KK} = \sum_i h_i h^i + \sum_{\alpha \in \Delta^+} h^\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+} e_{-\alpha} e_\alpha.$$

Лемма 2 *Если V^Λ — модуль со старшим весом Λ, то $z_{KK} v = (\Lambda, \Lambda + 2\rho) v$ для всех $v \in V$. (При этом несущественно, является ли V неприводимым.)*

Доказательство. Применим z_{KK} к старшему вектору v_Λ:

$z_{KK} v_\Lambda = (\sum\limits_i h_i h^i) v_\Lambda + \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} h^\alpha v + \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} e_{-\alpha} e_\alpha v = (\sum\limits_i \Lambda(h_i)\Lambda(h^i) + \sum\limits_{\alpha \in \Delta^+} \Lambda(h^\alpha)) v_\Lambda =$
$((\Lambda, \Lambda) + 2(\Lambda, \rho)) v_\Lambda,$
то есть для старшего вектора равенство выполняется. Утверждение леммы вытекает из перестановочности z_{KK} со всеми элементами $U(\mathfrak{g})$. $\square$

Следствие 3 *Пусть* $\mathrm{ch}\, V^\Lambda = \sum\limits_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} c_\lambda \mathrm{ch}\, M^\lambda$. *Тогда если $c_\lambda \neq 0$, то $(\lambda, \lambda + 2\rho) = (\Lambda, \Lambda + 2\rho)$ (или, что то же самое, $\|\lambda + \rho\| = \|\Lambda + \rho\|$).*

Лемма 4 *Если Λ — доминантный вес (т.е. $\dim L^\Lambda < \infty$), то $c_\lambda \neq 0 \iff \lambda + \rho = w(\Lambda + \rho)$ для некоторого $w \in W$.*

Доказательство. Пусть $c_\lambda \neq 0$. Обозначим $\Lambda' = \Lambda + \rho$. Ясно, что $\lambda + \rho \in D(\Lambda')$. Пусть элемент $w \in W$ переводит $\lambda + \rho$ в элемент камеры Вейля $\lambda' = w(\lambda + \rho) \in \overline{K}$, т.е. $\forall \alpha_i \in \Delta^+ \quad (\lambda', \alpha_i) \geq 0$ (Такой элемент существует для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$). В силу W-инвариантности характера $\mathrm{ch}\ L^\Lambda$, $c_\lambda \neq 0 \Longleftrightarrow c_{\lambda'} \neq 0$. Следовательно, $\lambda' \in D(\Lambda')$ и $\lambda' = \Lambda' - \sum m_i\alpha_i$, где все $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Обозначим $\beta = \sum m_i\alpha_i$ и найдём скалярный квадрат (Λ', Λ'):

$$(\Lambda', \Lambda') = (\lambda + \beta, \lambda + \beta) = (\lambda', \lambda') + 2(\lambda', \beta) + (\beta, \beta).$$

Поскольку $\lambda' \in \overline{K}$, $2(\lambda', \beta) \geq 0$, т.е. $(\Lambda', \Lambda') \geq (\lambda', \lambda') + (\beta, \beta)$.

Если $(\lambda', \lambda') < (\Lambda', \Lambda')$, то, согласно предыдущему следствию, коэффициент при c_λ равен нулю. А если это не так, то $\beta = 0$, т.е. $\Lambda' = \lambda'$, и, значит, $\Lambda + \rho = w(\lambda + \rho)$, откуда $c_\lambda = \det\ w$. $\square$.

Формула Вейля для характера

Пусть Λ — доминантный вес. Из предыдущих рассуждений получается *формула Вейля для характера*:

$$\mathrm{ch}\ L^\Lambda = \frac{\sum\limits_{w \in W} (\det\ w) e^{w(\Lambda+\rho)}}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}}.$$

Теперь найдём размерность представления. Но просто подставить 0 в эту формулу нельзя, т.к. знаменатель обратится в нуль. Воспользуемся следующим приёмом.

Если взять $\Lambda = 0$, то представление L^Λ будет тривиальным, $\mathrm{ch}\ L^\Lambda = 1$. Отсюда получается *тождество Вейля для знаменателя*:

$$\sum_{w \in W} (\det\ w) e^{w(\rho)} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}.$$

Возьмём $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и подставим в эту формулу. Получим:

$$\sum_{w \in W} (\det\ w) e^{(w(\rho), \lambda)} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} e^{(\alpha,\lambda)/2} - e^{-(\alpha,\lambda)/2} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} 2\,\mathrm{sh}\frac{(\alpha, \lambda)}{2}.$$

Будем брать $\lambda = t(\Lambda + \rho)$, где t — вещественный параметр. Тогда

$$\sum_{w \in W} (\det\ w) e^{t(w(\Lambda+\rho),\rho)} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} 2\,\mathrm{sh}\frac{t(\alpha, \Lambda + \rho)}{2}.$$

Теперь для нахождения размерности L^Λ осталось устремить t к нулю:

$$\dim\, L^\Lambda = \lim_{t\to 0} < \mathrm{ch}\ L^\Lambda, t\rho > = \lim_{t\to 0} \frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} 2\,\mathrm{sh}\,\frac{t(\alpha,\Lambda+\rho)}{2}}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta^+} 2\,\mathrm{sh}\,\frac{t(\alpha,\rho)}{2}} = \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{(\Lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}.$$

Полученная формула называется *формулой Вейля для размерности.*