А. Вербовецкий, Б. Кругликов

Интегрируемость и симметрии дифференциальных уравнений

Задача 1. Доказать, что все распределения ранга k в $\mathbb{R}^n$ в общем положении без (локальных) модулей исчерпываются случаями $(k,n)=(1,n),(n-1,n),(2,4)$. Найти соответствующие локальные нормальные формы.

Задача 2. Рассмотрим распределение Π_1 в $\mathbb{R}^N$. Обозначим модуль его сечений через $\mathcal{D}_1=C^\infty(\Pi_1)$ и положим $\mathcal{D}_2=[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_1]$. Пусть модуль $\mathcal{D}_2$ проективен, т.е. $\mathcal{D}_2=\mathcal{C}^\infty(\Pi_2)$ для нового распределения Π_2. Далее определяем по индукции $\mathcal{D}_{i+1}=[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_i]$, $\mathcal{D}_i=C^\infty(\Pi_i)$. Распределение будем называть регулярным, если ранги всех Π_i постоянны. Определим $\Pi[i]=\Pi_i/\Pi_{i-1}$, $G(\Pi)=\oplus\Pi[i]$.

- Используя коммутаторы и факторизацию, определить структуру градуированной алгебры Ли на $G(\Pi)$ для регулярных распределений Π (она обобщает конструкцию кривизны распределения и называется инвариантом Танаки или нильпотентной аппроксимацией; кстати, а почему нильпотентной?).
- Вычислить эту алгебру для распределения Картана $\mathcal{C}_k$ в $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.
- Для $n=1$ использовать вышеприведенное описание для геометрической характеризации распределения Картана (нормальная форма Гурса). Обобщить на случай произвольного n.

Задача 3. Доказать, что если $Э_\varphi$ является симметрией уравнения $\mathcal{E}=\{F_i=0\}$ и система $\mathcal{E}$ совместна (формально интегрируема), то и система $\mathcal{E}'=\{F_i=0,\ \varphi=0\}$ совместна. Две варианта задачи: легкий случай одного (скалярного) уравнения $\operatorname{codim}(\mathcal{E})=1$ и более сложный общий.

Задача 4. Исследовать на совместность системы (a, b — константы)

1. $\mathcal{E}=\{u_{xx}-u_{yy}=0,\ \det\operatorname{Hess}(u)=ae^{bu}\}$.
2. $\mathcal{E}=\{u_{xx}+u_{yy}=(au+b)^{-1},\ \det\operatorname{Hess}(u)=0\}$.

Задача 5. Рассмотрим уравнение ассоциативности

$$F=u_{222}-u_{112}^2+u_{111}u_{122}=0$$

на функцию $u=u(x_0,x_1,x_2)$ от трех переменных. Выясните, при каких значениях константы r это уравнение можно так переопределить уравнением $G=x_2u_2-ru=0$, что полученная система будет совместна. В каких случаях G будет симметрией?

Задача 6. Провести вычисление когомологий Спенсера и тензоров Вейля для полностью определенной системы

$$\mathcal{E}=\{p_\sigma=F_\sigma(x,p_\tau),\ |\sigma|=k,\ 0\leqslant|\tau|<k\}\subset J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

Сформулировать критерий интегрируемости.

Задача 7. То же самое для системы

$$\mathcal{E}=\{p_{ij}=F_{ij}(x,t,u,p_t),\ 1\leqslant i<j\leqslant n\}\subset J^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

Задача 8. Рассмотрим конформную алгебру Ли $co(n)=\mathbb{R}\oplus so(n)\simeq\mathbb{R}\oplus\Lambda^2V^*$, где $V=\mathbb{R}^n$ суть модельное пространство с конформной евклидовой структурой. Доказать, что $co(n)^{(1)}=V^*$ для всех n, $co(n)^{(i)}=0$ для $i\geqslant 2$ и $n>2$. Разобрать отдельно случаи $n=1,2$.

З а д а ч а 9. Изучить эрмитову структуру с точки зрения G_0-структур. В данном случае модельное (линейное) пространство V размерности $2n$ снабжено евклидовой структурой $\langle\,,\rangle$, комплексной структурой J и симплектической структурой $(\,,)$, которые согласованы в следующем смысле: $\langle\xi,\eta\rangle = (J\xi,\eta)$. Алгебра автоморфизмов $\mathfrak{g}_0 = u(n)$ является пересечением любых двух из алгебр автоморфизмов отдельных структур $\mathfrak{g}_1 = so(V)$, $\mathfrak{g}_2 = gl_{\mathbb{C}}(V)$ и $\mathfrak{g}_3 = sp(V)$. Для соответствующей системы УрЧП $\mathcal{E}_G \subset J^1(M;V)$ посчитать когомологии Спенсера и тензоры Вейля. Сформулировать критерий интегрируемости геометрической структуры.

З а д а ч а 10. Покажите, что задача о движении на прямой трех точек, взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними, разрешима в квадратурах.

З а д а ч а 11. Пусть E — контактное (или симплектическое) многообразие, а $I^k(E)$ — многообразие k-джетов лежандровых (соотв., лагранжевых) подмногообразий в E. Докажите, что при $k \geqslant 2$ естественные проекции $\pi_{k,k-1}\colon I^k(E) \to I^{k-1}(E)$ являются аффинными расслоениями, опишите их и докажите, что поднятия контактных (соотв., симплектических) диффеоморфизмов суть аффинные автоморфизмы.

З а д а ч а 12. Опишите алгебру внутренних симметрий уравнения Гильберта–Картана $v' = (u'')^2$. (Это недоопределенное обыкновенное уравнение.)

З а д а ч а 13 (коммутаторное тождество). Пусть φ — симметрия уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Докажите, что существует такой $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ, что на $\mathcal{E}^\infty$ выполняется тождество $[\text{Э}_\varphi - \ell_\varphi, \ell_F] = \Delta \circ \ell_F$.

З а д а ч а 14. Вычислите симметрии нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x,$$

где $k(u)$ — некоторая гладкая функция.

З а д а ч а 15. Вычислите алгебру классических симметрий уравнения КдФ $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$. Постройте такой минимальный набор $\mathcal{S}$ подалгебр в ней, чтобы любое инвариантное решение уравнения КдФ могло быть получено действием некоторой симметрии из некоторого $\mathfrak{g}$-инвариантного решения для $\mathfrak{g} \in \mathcal{S}$.

З а д а ч а 16. Профакторизуйте уравнение Лапласа $u_{xx}+u_{yy} = 0$ по действию двумерной группы трансляций вдоль x и y.

З а д а ч а 17. Профакторизуйте пространство $J^\infty(\mathbb{R}^3, 2)$ бесконечных джетов двумерных подмногообразий в $\mathbb{R}^3$ по действию группы евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$.