Листок 1. Планарные графы (11 февраля)

1. Используя ε-δ определение непрерывности, докажите тот факт, что композиция двух непрерывных функций непрерывна.

2. Докажите, что непрерывный образ связного топологического пространства связен.

* * *

Граф G — это множество точек, называемых *вершинами*, причём некоторые пары рёбер соединены *рёбрами*.

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называют *степенью* вершины. В том случае, когда из любой вершины графа можно пройти по его рёбрам в любую другую вершину, граф называют *связным*. Граф может иметь *петли* (рёбра, начало и конец которых совпадают) и *двойные рёбра* (несовпадающие рёбра, имеющие одну и ту же пару вершин). Попарно различные вершины $v_1, \dots, v_n$, соединённые рёбрами v_1v_2, $v_2v_3, \dots, v_nv_1$, называют *циклом*.

Граф G называют *планарным*, если его можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра попарно не пересекались.

3. (Кусочно–линейная теорема Жордана) Пусть C — замкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus C$ состоит ровно из двух связных областей, причём границей каждой из них служит C.

4. Пусть a, b, c, d — точки замкнутой несамопересекающейся ломаной C, расположенные в указанном порядке. Предположим, что точки a и c соединены ломаной L_1, а точки b и d соединены ломаной L_2, причём обе эти ломаные лежат в одной и той же из двух областей, образованных ломаной C. Докажите, что ломаные L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке.

Пусть граф K_n состоит из n вершин, попарно соединённых рёбрами, а граф $K_{n,m}$ состоит из $n+m$ вершин, разбитых на два подмножества из n вершин и из m вершин, причём рёбрами соединены все пары вершин из разных множеств.

5. Докажите, что графы $K_{3,3}$ и K_5 непланарные.

6. Пусть G — *дерево*, т.е. связный граф без циклов. Докажите, что $v(G) = e(G) + 1$, где $v(G)$ — число вершин, $e(G)$ — число рёбер графа G.

7. (Формула Эйлера) Пусть G — планарный граф, состоящий из s компонент связности, среди которых нет изолированных вершин. Пусть, далее, v — число вершин графа G, а e — число его рёбер. Тогда для любого вложения графа G в плоскость число граней f одно и то же, а именно, $f = 1 + s - v + e$.

8. Выведите из формулы Эйлера для планарных графов формулу Эйлера, связывающую число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника.

9. Докажите, что связный планарный граф (без петель и двойных рёбер) содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

10. Докажите, что вершины любого планарного графа (без петель и двойных рёбер) можно раскрасить в пять цветов так, что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

11. а) Пусть G — планарный граф без изолированных вершин, v_i — число его вершин, из которых выходит i рёбер, f_j — число граней, ограниченных j рёбрами (с учетом их кратностей). Докажите, что тогда $\sum_i (4-i)v_i + \sum_j (4-j)f_j = 4(1+s) \geqslant 8$, где s — число компонент связности графа G.

б) Докажите, что если все грани 4-угольные, то $3v_1 + 2v_2 + v_3 \geqslant 8$.

в) Докажите, что если любая грань ограничена циклом, содержащим не менее n рёбер, то $e \leqslant \frac{n(v-2)}{n-2}$.

12. Воспользовавшись задачей 11 в), получите ещё одно доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$.

13. а) Пусть G — планарный граф, все грани которого содержат чётное число рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета.

б) Пусть γ — гладкая замкнутая кривая, все самопересечения которой трансверсальны. Докажите, что γ разбивает плоскость на области, которые можно раскрасить в два цвета так, что области, граничащие по некоторой дуге, будут разного цвета.