Листок 10. Накрывающие пространства (15 апреля)

1. Постройте универсальное накрытие тора T^2.

2. Постройте универсальное накрытие букета двух окружностей.

3. Постройте универсальное накрытие букета $S^1 \bigvee S^2$.

4. Приведите пример нерегулярного накрытия букета двух окружностей.

5. Постройте универсальное накрытие сферы с g ручками, где $g \geqslant 2$.

6. Пусть одна двумерная поверхность n-листно накрывает другую. Как связаны их эйлеровы характеристики?

7. Докажите, что сферу с g_1 ручками можно накрыть сферой с g_2 ручками ($g_1, g_2 \geqslant 2$) тогда и только тогда, когда $g_2 - 1$ делится на $g_1 - 1$.

8. Докажите, что любой автоморфизм накрытия полностью задаётся образом одной точки при этом автоморфизме.

9. а) Докажите, что накрытие $p : \tilde{X} \to X$ регулярно тогда и только тогда, когда группа $\mathrm{Aut}\,(p)$ транзитивно действует на слое $p^{-1}(x_0)$, т.е. переводит любой элемент слоя в любой другой элемент того же слоя.

б) Докажите, что для регулярного накрытия $p : \tilde{X} \to X$ группа $\mathrm{Aut}\,(p)$ изоморфна $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

10. Докажите, что любая подгруппа свободной группы G свободна.

11. Докажите, что если H — подгруппа свободной группы G и индекс $[G : H] = k < \infty$, то $\mathrm{rk}\, H = (\mathrm{rk}\, G - 1)k + 1$.

12. Докажите, что свободная группа ранга 2 содержит в качестве подгруппы свободную группу любого ранга n (в том числе и ранга ∞).