## Листок 2. Топологические пространства. Шарнирные механизмы (18 февраля)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ величину $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ называют *расстоянием* от точки $x$ до множества $A$.

**1.** а) Докажите, что функция $f(x) = d(x, A)$ непрерывна для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$.
б) Докажите, что если множество $A$ замкнуто, то функция $f(x) = d(x, A)$ для всех $x \notin A$ принимает положительные значения.

Пусть $A$, $B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольные подмножества. Величину $d(A, B) = \inf\limits_{a \in A,\, b \in B} \|a - b\|$ называют *расстоянием* между множествами $A$ и $B$.

**2.** Верно ли, что $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$?

Подмножество $K$ топологического пространства называют *компактным*, если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**3.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество, $C \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество. Докажите, что существует такая точка $c_0 \in C$, что $d(A, C) = d(A, c_0)$, а если множество $A$ тоже компактно, то существует ещё и такая точка $a_0 \in A$, что $d(A, C) = d(a_0, c_0)$.

**4.** Докажите, что любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

**5.** Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

**6.** Введите «естественную» топологию на множестве матриц $n \times m$.

**7.** Связно ли пространство GL(n)?

**8.** а) Докажите, что пространство SO(3) связно.
б) Докажите, что пространство GL(3) состоит из двух связных компонент.

Топологическое пространство $X$ называют *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся непересекающиеся открытые множества, содержащие эти точки.

**9.** Приведите пример нехаусдорфова топологического пространства.

**10.** Докажите, что в хаусдорфовом пространстве $X$ для любых двух различных точек $x$ и $y$ найдётся окрестность $U \ni x$, замыкание которой не содержит $y$.

**11.** Пусть $C$ — компактное подмножество хаусдорфова пространства $X$ и $x \in X \setminus C$. Докажите, что у точки $x$ и у множества $C$ есть непересекающиеся окрестности.

**12.** Докажите, что у любых двух непересекающихся компактных подмножеств $A$ и $B$ хаусдорфова пространства $X$ есть непересекающиеся окрестности.

**13.** Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства $X$ на хаусдорфово пространство $Y$. Докажите, что $f$ — гомеоморфизм.

* * *

**14.** Плоский шарнирный механизм состоит из двух одинаковых стержней, один конец каждого из которых закреплён в точке $A$, а второй конец свободный. Найдите конфигурационное пространство этой системы, если стрежни: а) могут занимать одно и то же положение и проходить один над другим; б) не могут.

Пусть $\langle l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}; d\rangle$ — плоский шарнирый механизм, состоящий из $n$ стержней, один из которых неподвижен, а остальные стержни (вместе с неподвижным) образуют замкнутую ломаную; $d$ — длина неподвижного стержня, $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ — длины подвижных стержней (по порядку).

**15.** Найдите конфигурационные пространства следующих шарнирных механизмов: а) $\langle 2, 2, 2; 7\rangle$; б) $\langle 1, 1, 1; 1\rangle$; в) $\langle 2, 3, 2; 3\rangle$.

**16.** Найдите конфигурационное пространство для $\langle 1, 1, 1, 1; 3.9\rangle$.

**17.** Найдите конфигурационное пространство для $\langle 1, 1, \ldots, 1; n - 0.1\rangle$.

**18.** Найдите конфигурационное пространство для $\langle 6, 2, 2, 6; 6\rangle$.

**19.** Найдите конфигурационное пространство для $\langle 2, 1, 1, 2; 2\rangle$.