Листок 3. Топологические конструкции (25 февраля)

1. Докажите, что $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

2. Докажите, что пространство $S^1 \times S^1$ гомеоморфно пространству, которое получается при следующем отождествлении точек сторон квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$: $(x, 0) \sim (x, 1)$ и $(0, y) \sim (1, y)$. (Это пространство называют *тором*.)

3. Докажите, что прямое произведение окружности на отрезок не гомеоморфно листу Мёбиуса.

4. Докажите, что следующие топологические пространства гомеоморфны:
а) множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;
б) множество гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;
в) сфера S^n, в которой отождествлена каждая пара диаметрально противоположных точек.
г) шар D^n, в котором отождествлена каждая пара диаметрально противоположных точек граничной сферы $S^{n-1} = \partial D^n$.

5. Докажите, что следующие топологические пространства гомеоморфны:
а) множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат;
б) сфера $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, в которой отождествлены точки вида λx для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ (для каждой фиксированной точки $x \in S^{2n+1}$);
в) шар $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$, в котором отождествлены точки граничной сферы $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$ вида λx для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ (для каждой фиксированной точки $x \in S^{2n-1}$).

6. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$.

7. Докажите, что $CS^n \approx D^{n+1}$ и $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.

8. Докажите, что сфера S^2 является CW-комплексом.

9. Докажите, что тор T^2 является CW-комплексом.

10. Докажите, что сфера S^n является CW-комплексом.

11. Докажите, что вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ является CW-комплексом.

12. Докажите, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является CW-комплексом.

13. Докажите, что $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

14. Докажите, что $S^{n+m-1} \setminus S^{n-1} \approx \mathbb{R}^n \times S^{m-1}$. (Предполагается, что сфера S^{n-1} расположена в S^{n+m-1} стандартно.)

15. Пусть $S^p \bigvee S^q = (S^p \times \{*\}) \bigcup (\{*\} \times S^q) \subset S^p \times S^q$. Докажите, что $S^p \times S^q / S^p \bigvee S^q \approx S^{p+q}$.