## Листок 5. Гомотопии. Двумерные поверхности — продолжение (11 марта)

**1.** Докажите, что пространства $S^1 \bigvee I^1$ и $S^1$ гомотопически эквивалентны.

**2.** Докажите, что пространства $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ и $S^2 \bigvee S^1$ гомотопически эквивалентны.

**3.** Докажите, что если из пространства $\mathbb{R}^3$ выбросить $n$ экземпляров $S^1$ (все окружности незаузленные и попарно не зацепленные), то полученное пространство будет гомотопически эквивалентно букету $n$ экземпляров пространства $S^2 \bigvee S^1$.

**4.** Пусть $L$ — две окружности в $\mathbb{R}^3$, зацепленные наиболее простым способом. Докажите, что пространства $\mathbb{R}^3 \setminus L$ и $S^2 \bigvee T^2$ гомотопически эквивалентны.

**5.** Докажите, что следующие утверждения эквивалентны (т.е. покажите, как они выводятся друг из друга):

а) Любое непрерывное отображение $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку.

б) Не существует ретракции $r : D^n \to S^{n-1}$.

в) Пусть $v(x)$ — такое непрерывное векторное поле на $D^n$, что $v(x) = x$ для всех $x \in S^{n-1}$. Тогда $v(x) = 0$ для некоторой точки $x \in D^n$.

**6.** Докажите, что пространства $\Sigma(S^1 \times S^1)$ и $S^2 \bigvee S^2 \bigvee S^3$ гомотопически эквивалентны.

**7.** Докажите, что $A$ — ретракт $X$ тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $f : A \to Y$ можно продолжить на всё $X$.

**8.** Докажите, что если любое непрерывное отображение пространства $X$ в себя имеет неподвижную точку, то любое непрерывное отображение его ретракта $A$ в себя тоже имеет неподвижную точку.

**9.** Пусть $S^\infty$ —множество точек $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля и $\sum x_i^2 = 1$. Это множество является метрическим пространством, и на нём есть естественная топология. Докажите, что пространство $S^\infty$ стягиваемо.

*Указание*: докажите, что тождественное отображение гомотопно отображению $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$.

* * *

**10.** Докажите, что поверхности $nT^2$ и $mP^2$ можно получить из $4n$-угольника и $2m$-угольника, отождествляя их стороны соответствующим образом.

**11.** а) Докажите, что на поверхности $nP^2$ существует замкнутая кривая $\gamma$, после разрезания вдоль которой поверхность становится ориентируемой.

б) Докажите, что если $n$ чётно, то окрестность кривой $\gamma$ гомеоморфна цилиндру, а если $n$ нечётно — то листу Мёбиуса.

**12.** Предположим, что на сфере с $g$ ручками $M^2$ можно расположить $p$ несамопересекающихся замкнутых кривых $C_1, \dots, C_p$ так, чтобы они попарно не пересекались и множество $M^2 \setminus (C_1 \bigcap \dots \bigcap C_p)$ было связно, но любые $p+1$ такие кривые разбивают $M^2$ на части. Докажите, что $p = g$.

**13.** Докажите, что на замкнутой неориентируемой поверхности $nP^2$ можно расположить $n$ попарно не пересекающихся листов Мёбиуса, но нельзя расположить $n+1$ попарно непересекающихся листов Мёбиуса.