Листок 7. Векторные поля на двумерных поверхностях (25 марта)

1. Постройте на торе векторное поле без особых точек.

2. Постройте на бутылке Клейна векторное поле без особых точек.

3. Постройте на сфере векторное поле с одной особой точкой.

4. Постройте на проективной плоскости векторное поле с одной особой точкой.

5. Постройте на сфере с двумя ручками векторное поле с одной особой точкой.

* * *

6. На сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное поле векторов единичной длины, не обязательно касающихся этой сферы. Докажите, что хотя бы один из этих векторов ортогонален сфере.

7. Пусть $f : S^2 \to S^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in S^2$, для которой $f(x) = \pm x$.

8. Докажите, что любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ имеет неподвижную точку.