Листок 8. Кривые на плоскости (1 апреля)

Доказательство теоремы Уитни

1. Докажите, что с помощью регулярной гомотопии кривую γ можно заменить на кривую длины 1, для которой выполнены следующие условия:

1) кривая имеет длину 1;
2) при $t=0$ кривая проходит через начало координат;
3) при $t=0$ кривая имеет вектор скорости $(1,0)$;
4) в каждой точке кривая имеет вектор скорости единичной длины.

Предположим, что γ_0 и γ_1 — гладкие замкнутые кривые, индексы Уитни которых равны N. Будем также считать, что они уже приведены к виду, сформулированному в условии задачи 1.

2. Запишем векторы скоростей кривых γ_0 и γ_1 в виде $v_0(s)=e^{i\varphi_0(s)}$ и $v_1(s)=e^{i\varphi_1(s)}$, где $\varphi_0(0)=\varphi_1(0)=0$ и $\varphi_0(1)=\varphi_1(1)=2\pi N$. Положим $\varphi_t(s)=(1-t)\varphi_0(s)+t\varphi_1(s)$ и рассмотрим кривую $\tilde\gamma_t$ с вектором скорости $v_t(s)=e^{i\varphi_t(s)}$: $\tilde\gamma_t(s)=\int_0^s e^{i\varphi_t(\tau)}d\tau$. При $t\neq 0,1$ кривая $\tilde\gamma_t$ не обязательно замкнутая. Постройте с помощью этой кривой замкнутую гладкую кривую, для которой вектор скорости отличен от нуля в каждой точке.

Указание. Рассмотрите кривую $\gamma_t(s)=\tilde\gamma_t(s)-s\tilde\gamma_t(1)=\int_0^s e^{i\varphi_t(\tau)}d\tau-s\int_0^1 e^{i\varphi_t(\tau)}d\tau$.

3. Докажите теорему Уитни на сфере.

* * * * * * * * * * * * * * *

Пусть $\gamma: S^1\to\mathbb{R}^2$ — гладкая замкнутая кривая с конечным числом точек самопересечения, причем все её точки самопересечения двукратные. Выберем на кривой γ точку x_0, не являющуюся точкой самопересечения. Для точки самопересечения x_i с номером i определим число W_i по следующему правилу. Будем идти из точки x_0 вдоль кривой γ в направлении, согласованном с её ориентацией. Когда мы будем первый раз проходить через точку x_i, нарисуем касательный вектор v_1, соответствующий направлению движения; когда мы будем проходить через эту точку второй раз, нарисуем второй касательный вектор v_2. Если репер (v_1,v_2) ориентирован отрицательно, то $W_i=1$, а если этот репер ориентирован положительно, то $W_i=-1$. *Числом Уитни* называют число $W(\gamma,x_0)=\sum W_i$, где суммирование ведётся по всем точкам самопересечения кривой γ.

4. Докажите, что если $w(\gamma)$ — индекс Уитни кривой γ, а $W(\gamma,x_0)$ — число Уитни, то $w(\gamma)=W(\gamma,x_0)\pm 1$.

Пусть γ — замкнутая дифференцируемая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, состоящая из конечного числа выпуклых дуг, не касающихся друг друга во внутренних точках. Тогда кривая γ имеет конечное число $D(\gamma)$ точек самопересечения и конечное число $F(\gamma)$ точек перегиба. Мы будем предполагать, что точки самопересечения кривой γ двойные, т.е. у кривой γ нет точек, через которые проходит более двух ветвей кривой. Мы будем также предполагать, что у кривой γ нет тройных касательных, т.е. любая прямая касается кривой γ не более чем в двух различных точках. Двойные касательные бывают двух типов: внутренние и внешние. Пусть $I(\gamma)$ — количество внутренних двойных касательных, $II(\gamma)$ — количество внешних двойных касательных.

5. Докажите, что $II(\gamma)-I(\gamma)=D(\gamma)+\frac{F(\gamma)}{2}$.