ЛЕКЦИЯ 1

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Соболевские пространства появились в работах С.Л. Соболева в 30-е годы. Его монография [1] вышла в 1950 г., потом была переиздана. Эти пространства оказались чрезвычайно удобными в различных отделах анализа, в особенности в уравнениях математической физики. Сейчас это отдельный раздел функционального анализа. По существу у Соболева уже было отчетливое понятие обобщенной функции.

Систематическую разработку теории обобщенных функций предпринял Лоран Шварц в 40-е годы, проанализировав множество достижений классиков анализа. Его монография [2] вышла в 1950 г., у нас распространялась ротапринтная копия. В Москве "бум" этой теории начался с работ И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова. Их первая книга [3] недавно переиздана.

Псевдодифференциальные операторы появились в 60-е годы, они оказались необходимыми при решении проблемы вычисления индекса общего эллиптического оператора, поставленной И.М. Гельфандом в 1960 г., а затем нашли применения ко многим другим задачам. Это синтез теории интегральных и дифференциальных операторов, содержащий исчисление символов.

По всем этим направлениям написано необозримое количество работ и много книг. "Бум" прошел, но остался новый язык и аппарат, позволившие продвинуться во многих задачах анализа, прежде всего в уравнениях в частных производных, см., например, [4]. Корифеи современной геометрии, живущие на Западе (такие, как Атья, Зингер, Гилмен и многие другие), прекрасно владеют этим аппаратом. В учебники он только начинает проникать, см., например, [5]. Но это пока не относится к псевдодифференциальным операторам.

1. С.Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинградского университета, Л., 1950.

2. L Schwartz. Théorie des distributons. Hermann, Paris, 1950.

3. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959.

4. Ю.В. Егоров и М.А. Шубин. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Элементы современной теории. Итоги науки и техники, Совр. проблемы математики, Фунд. направления, т. 31. ВИНИТИ, М., 1988. С. 6–125.

5. М.А. Шубин. Лекции об уравнениях математической физики. МЦНМО, М., 2001.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

# I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**1. Определение обобщенной функции (распределения).** Рассмотрим пространство $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно гладких функций (комплекснозначных). Это *основные функции* (потом введем другие пространства основных функций). Это пространство линейно. В нем можно ввести топологию, но пока, следуя И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову, ограничимся определением сходимости: $\varphi_j \to \varphi$ в этом пространстве, если существует такое $A > 0$, что все эти функции равны нулю при $|x| > A$ и $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно при любом $\alpha$. Здесь и дальше

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \qquad \partial_j = \partial/\partial x_j.$$

Задача 1. Проверить полноту пространства $\mathcal{D}$ относительно этой сходимости (проверить, что фундаментальная последовательность имеет предел).

Основные функции обычно будем обозначать буквами $\varphi$, $\psi$.

*Обобщенная функция* $f$ (над $\mathcal{D}$) – это линейный непрерывный функционал $\langle f, \varphi\rangle$ над $\mathcal{D}$.

Примеры. 1. *Дельта-функция* $\delta(x - x_0)$:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x)\rangle = \varphi(x_0). \tag{1}$$

Это определение придает точный смысл известному физическому определению дельта-функции: это такая "функция", равная 0 вне $x_0$ и бесконечности в $x_0$, что всегда $\int \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$.

2. *Функционал типа функции*, или *регулярная обобщенная функция.* Пусть $f(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Полагаем

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\, dx \tag{2}$$

(интеграл по $\mathbb{R}^n$).

Совокупность всех обобщенных функций над $\mathcal{D}$ обозначается через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Это линейное пространство с определением линейных операций

$$\langle \alpha f + \beta g, \varphi\rangle = \alpha\langle f, \varphi\rangle + \beta\langle g, \varphi\rangle. \tag{3}$$

**2. Дифференцирование обобщенной функции.** Сначала пусть $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int \partial_j f(x)\varphi(x)\, dx = -\int f(x)\partial_j \varphi(x)\, dx$$

(проинтегрировали по частям). Принимая эту формулу за образец, полагаем для любой обобщенной функции $f$

$$\langle \partial_j f, \varphi\rangle = -\langle f, \partial_j \varphi\rangle. \tag{4}$$

Очевидно, что это обобщенная функция.

Мы видим, что обобщенные функции дифференцируемы и, значит, бесконечно дифференцируемы:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle \tag{5}$$

при любом $\alpha$; здесь и дальше $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Примеры. 1. Пусть для простоты $n = 2$. В анализе есть теорема:

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2),$$

если эти частные производные непрерывны в рассматриваемой точке. *Для обобщенных функций всегда*

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f. \tag{6}$$

Действительно,

$$\langle \partial_1 \partial_2 \varphi \rangle = \langle f, \partial_2 \partial_1 \varphi \rangle = \langle f, \partial_1 \partial_2 \varphi \rangle = \langle \partial_2 \partial_1 f, \varphi \rangle.$$

Мы видим, что для обобщенных функций $f$ порядок дифференцирования в $\partial^\alpha$ безразличен.

2. Пусть $f(x)$ – функция на прямой, гладкая вне точки $x_0$, имеющая в ней разные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Тогда ее производная в смысле обобщенных функций – функционал типа функции $f'(x)$ плюс $h\delta(x - x_0)$, где $h$ – скачок $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$. Это проверяется интегрированием по частям:

$$-\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx + h\varphi(x_0).$$

Этот результат легко обобщается на случай кусочно-гладкой функции с несколькими точками скачков.

В частности, производная в смысле обобщенных функций от *функции Хевисайда* $\theta(x)$, равной 0 при $x < 0$ и 1 при $x > 0$, равна $\delta(x)$.

3. Производные дельта-функции

$$\langle \partial^\alpha \delta(x - x_0), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \varphi(0).$$

**3. Умножение на бесконечно гладкую функцию.** Пусть $f \in D'$ и $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $f$ – регулярная обобщенная функция, то и $af$ – регулярная обобщенная функция и имеет место формула

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

В общем случае принимаем эту формулу за определение произведения $af$. Очевидно, что получается обобщенная функция.

Мы видим, что в $D'$ действуют линейные дифференциальные операторы с бесконечно гладкими коэффициентами

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha, \qquad a_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Задача 2. Проверить формулу Лейбница

$$(af)'=a'f+af' \qquad (n=1,\ \ a\in C^\infty,\ \ f\in\mathcal{D}').$$

**4. Регуляризация функций с особенностями.** Рассмотрим этот вопрос пока на примере.

Рассмотрим обычную функцию $1/x$, $n=1$. Как сопоставить ей обобщенную функцию? Интеграл

$$\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

вообще говоря, расходится.

*1-й способ.* Используем главное значение интеграла (p.v. – principal value): полагаем

$$\langle v.p.\,\frac{1}{x},\varphi\rangle = v.p.\int \frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Здесь вырезается симметричная окрестность особой точки. Этот предел существует и вычисляется следующим образом. Пусть $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge A$. Тогда он равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon<|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx+\varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|<A}dx\right]=\int_{|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

*2-й способ.* Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\,dx.$$

Пусть снова $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge A$. Тогда этот предел равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x+i\varepsilon}\,dx+\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|<A}\frac{dx}{x+i\varepsilon}.$$

Последний интеграл вычисляется как

$$\int_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}\frac{1}{z}\,dz=\log z\Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}=\arg z\Big|_{-A+i\varepsilon}^{A+i\varepsilon}$$

по формуле Ньютона–Лейбница. Здесь

$$\log z=\log|z|+i\arg z,\quad |\arg z|\le\pi.$$

В пределе получаем

$$\int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx - i\pi\varphi(0).$$

Эта обобщенная функция обозначается через $\frac{1}{x+i0}$. Таким образом,

$$\frac{1}{x+i0} = v.p.\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{7}$$

Задача 3. Определить и вычислить обобщенную функцию $\frac{1}{x-i0}$.

**5. Предельный переход.** *Сходимость в* $D'$ определяется как слабая сходимость:

$$f_j \to f, \text{ если } \langle f_j,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle$$

для любой основной функции $\varphi$. Вместо индекса $j$ тут может быть, скажем, индекс $\varepsilon \to 0$.

Примеры. 1. $v.p.\frac{1}{x}$ – предел функционалов типа функций $f_\varepsilon$, равных 0 при $|x|<\varepsilon$ и $1/x$ при $|x|>\varepsilon$.

2.

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x+i\varepsilon}$$

(под знаком предела – регулярные обобщенные функции).

Замечание. Если $f_j \to f$, то $\partial^\alpha f_j \to \partial^\alpha f$. (А в обычном анализе перестановка дифференцирования с предельным переходом требует дополнительных предположений.) Точно так же если $f_j \to f$ и $a$ – бесконечно гладкая функция, то $af_j \to af$. Это сразу видно из наших определений.

**6. Свертка обычных функций.** Это одна из важнейших операций в анализе; она обозначается звездочкой и определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{8}$$

Если $\varphi,\psi\in\mathcal{D}$, то легко проверяется, что свертка этих функций принадлежит $\mathcal{D}$. Действительно, она финитна, а производные любого порядка вычисляются дифференцированием под знаком интеграла:

$$\partial^\alpha(\varphi*\psi)(x) = \int \partial^\alpha\varphi(x-y)\psi(y)\,dy,$$

т.е.

$$\partial^\alpha(\varphi*\psi) = (\partial^\alpha\varphi)*\psi. \tag{9}$$

Ясно, что все производные непрерывны.

Но можно рассматривать свертку и более общих функций. Например, если $\varphi\in\mathcal{D}$, а $\psi$ – непрерывная функция, то свертка существует и принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а если $\psi$ – финитная непрерывная функция, то свертка принадлежит $\mathcal{D}$. Проверьте это самостоятельно.