ЛЕКЦИЯ 10.

Преобразование Фурье обобщенной функции r^λ. Преобразование Фурье g_λ в смысле обобщенных функций от r^λ, $\lambda \in (-n, 0)$, должно быть однородно степени $-n-\lambda$, а это число тоже принадлежит $(-n, 0)$. Можно ожидать, что $g_\lambda = C_\lambda \rho^{-n-\lambda}$ с учетом того, что обе эти функции локально интегрируемы и сферически симметричны. Здесь $\rho = |\xi|$. Приняв этот факт без доказательства, как фактически делают Гельфанд и Шилов, можно подсчитать коэффициент C_λ.

Для этого в равенство

$$\langle g_\lambda, \psi \rangle = \langle r^\lambda, \varphi \rangle,$$

где $\varphi = F[\psi]$, подставим $\varphi(x) = e^{-r^2/2}$ и воспользуемся тем, что в одномерном случае

$$F^{-1}[e^{-x^2/2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2}.$$

Получим

$$\int r^\lambda e^{-r^2/2} dx = C_\lambda (2\pi)^{-n/2} \int \rho^{-n-\lambda} e^{-\rho^2/2} d\xi.$$

В этих интегралах надо перейти к сферическим координатам, после чего сделать замены $r = \sqrt{2t}$ и $\rho = \sqrt{2\tau}$. В итоге получим

$$C_\lambda = 2^{\lambda+n} \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}. \tag{1}$$

Этот результат обобщается на те λ, которые не являются полюсами аналитически продолженной обобщенной функции r^λ.

В частности, этим путем можно найти преобразование Фурье от r^{-n+2} при $n \geq 3$ для нахождения фундаментального решения уравнения Лапласа:

$$F[r^{-n+2}] = C_{-n+2} \rho^{-2}, \quad \text{где} \quad C_{-n+2} = \frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Однородные функции степени $-n$. Пусть $f(x)$ – непрерывная при $x \neq 0$ функция, однородная степени $-n$. Может ли она определять функционал типа функции несмотря на неинтегрируемую особенность? Мы сейчас не предполагаем, что она сохраняет знак.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x)\varphi(x)\, dx = \int f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leq r \leq h} f(x)\, dx,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}$ и h настолько велико, что носитель этой функции лежит в шаре $O_h(0)$ радиуса h с центром в начале. Последний интеграл запишем в сферических координатах ($x = r\eta$):

$$\int_{\varepsilon \leq r \leq h} r^{-1} dr \int_{r=1} f(\eta)\, dS.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Для его сходимости при $\varepsilon \to 0$ *необходимо и достаточно*, чтобы интеграл от f по единичной сфере равнялся нулю:

$$\int_{r=1} f(\eta)\, dS = 0. \tag{2}$$

При этом условии $\langle f(x), \varphi(x)\rangle$ *существует как интеграл в смысле главного значения по Коши*:

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{r\geq\varepsilon} f(x)\varphi(x)\, dx = \int f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx. \tag{3}$$

Примеры функций $f(x)$, удовлетворяющих условию (2), при $n = 2$:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4}, \qquad \frac{x_1 x_2}{|x|^4}.$$

Дифференцирование функций, однородных степени $-n+1$. Пусть функция $f(x)$ однородна степени $-n+1$. Она определяет функционал типа функции, и это однородная обобщенная функция степени $-n+1$. Подсчитаем ее производные в смысле обобщенных функций. Это будут однородные обобщенные функции степени $-n+1$. Запишем их в виде

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq r\leq h} f(x)\partial_j[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx,$$

где h такое же, как выше, и проинтегрируем по частям. Получим

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[\int_{\varepsilon\leq r\leq h} \partial_j f(x)\cdot[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx$$
$$+\varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j - \int_{r=\varepsilon} f(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\omega_j\Bigg], \tag{4}$$

где форма ω_j определяется равенством

$$\omega_j = (-1)^{j-1} dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n. \tag{5}$$

Справа в (4) первый интеграл имеет предел при $\varepsilon \to 0$, а последний стремится к нулю. Получаем

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \int_{r\leq h} \partial_j f(x)\cdot[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j. \tag{6}$$

Последний интеграл, как легко проверить, не зависит от h. *Это и есть ответ.*

Если интеграл от обычной производной $\partial_j f(x)$ по единичной сфере равен нулю, то получается

$$-\langle f, \partial_j \varphi\rangle = \int \partial_j f(x)\cdot\varphi(x)\, dx + \varphi(0)\int_{r=h} f(x)\omega_j,$$

где первый интеграл надо понимать в смысле главного значения по Коши; при этом второй интеграл не обязательно равен нулю. Задача. Подсчитайте при $n = 2$ производную по x_2 в смысле обобщенных функций от $x_1/|x|^2$.

Теперь вычислению лапласиана, например, от $\ln r$ при $n = 2$ можно придать следующий вид. Вычисляем обычные первые производные, это локально интегрируемые однородные функции

$$\frac{x_j}{r^2} \quad (j = 1,\ 2).$$

Вычисляем от них производные в смысле обобщенных функций по x_j и складываем; так как $\ln r$ – гармоническая функция вне начала, то интеграл по шару исчезает, и мы получаем

$$\Delta \ln r = \delta(x) \int_{r=h} \frac{x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Как легко подсчитать, например, при $h = 1$, последний интеграл равен 2π, так что

$$\Delta \ln r = 2\pi\delta(x).$$

Задача. Проведите аналогичный подсчет лапласиана от $1/r$ при $n = 3$.

IV. СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Мы рассмотрим простейшие соболевские пространства $H^s = W_2^s$ в $\mathbb{R}^n$, в полупространстве, в ограниченной области и на замкнутом многообразии.

1. Пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$.

1.1. Исходным будем считать следующее *определение*. Пусть s – вещественное число. Пространство $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, что преобразование Фурье $\widetilde{u} = Fu$ в смысле обобщенных функций – обычная функция $\widetilde{u}(\xi)$ и величина

$$\|u\|_s^2 = \|u\|_{s,R^n}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi \tag{1}$$

конечна. Эта величина принимается за квадрат нормы в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно, что получается линейное нормированное пространство. Его образ Фурье – это весовое пространство типа L_2 с весом $(1 + |\xi|^2)^s$, или, что то же, обычное пространство L_2 в $\mathbb{R}^n$ относительно меры, которая на любом измеримом множестве M определяется равенством

$$\operatorname{mes} M = \int_M (1 + |\xi|^2)^s d\xi. \tag{2}$$

Такое пространство полно, поэтому H^s – банахово пространство. Более того, это *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v)_s = (u, v)_{s,R^n} = \int (1 + |\xi|^2)^s \widetilde{u}(\xi)\overline{\widetilde{v}(\xi)}\, d\xi. \tag{3}$$

Очевидно, что $\|u\|_s \le \|u\|_{s'}$ при $s < s'$, так что пространство с бóльшим индексом непрерывно вложено в пространство с меньшим индексом. Пространство H^0 очевидным образом совпадает с $L_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому *все пространства H^s с неотрицательным s состоят из обычных квадратично интегрируемых функций.* Дельта-функция $\delta(x)$, как легко понять, принадлежит H^s при $s < -n/2$.

Далее, у функций из H^1 производные первого порядка в смысле обобщенных функций принадлежат L_2. Мы можем дать второе определение пространства H^1: это такие функции $u(x)$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$, что все их первые производные $D_j u(x)$ в смысле обобщенных функций принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$; при этом

$$\|u\|_1^2 = \int \left[|u(x)|^2 + \sum_1^n |D_j u(x)|^2 \right] dx. \tag{4}$$

Совпадение этой формулы с (1) при $s = 1$ с точностью до числового множителя следует из равенства Парсеваля.

Более общий факт состоит в следующем.

Теорема 1. *При натуральном m пространство $H^m(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций, что их производные до порядка m включительно – квадратично интегрируемые функции. При этом норму в $H^m(\mathbb{R}^n)$ можно определить равенством*

$$\|u\|'^2_{m,R^n} = \int \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u(x)|^2 \, dx. \tag{5}$$

По существу это определение С.Л. Соболева (который рассматривал только целые неотрицательные s). Эквивалентность норм $\|u\|_m$ и $\|u\|'_m$ при натуральном m следует из очевидного неравенства

$$0 < C_1 \le \frac{\sum_{|\alpha|\le m} |\xi^\alpha|^2}{(1+|\xi|^2)^m} \le C_2. \tag{6}$$

Из этого неравенства следует также, что *любой оператор в частных производных с постоянными коэффициентами порядка m действует ограниченным образом из H^s в H^{s-m} при любом s.* Немного дальше мы обобщим это утверждение на операторы с "достаточно хорошими" переменными коэффициентами.

1.2. Из уже сказанного видно, что элементы пространства H^s тем "лучше", чем чем выше s. Еще более отчетливо это видно из следующей *теоремы вложения*, доказанной С.Л. Соболевым для натуральных s:

Теорема 2. *Пусть s вещественно и $s > n/2$. Тогда любая функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена после возможного исправления на множестве нулевой лебеговой меры. При этом справедливо неравенство*

$$\sup |u(x)| \le C\|u\|_s, \tag{7}$$

означающее, что пространство H^s непрерывно вложено в *пространство* $C_b(\mathbb{R}^n)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\sup|u(x)|$.

Доказательство. При сделанных предположениях преобразование Фурье $\widetilde{v}(\xi)$ функции $u(x)$ – суммируемая функция: в силу неравенства Шварца

$$\int |\widetilde{u}(\xi)|\,dx \le \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} = C\|u\|_s. \quad (8)$$

Поэтому почти всюду

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi} \widetilde{u}(\xi)\,d\xi. \quad (9)$$

Действительно, $u(x)$ восстанавливается по своему преобразованию Фурье формулой

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle \widetilde{u}(\xi), F^{-1}[\varphi]\rangle = \int \widetilde{u}(\xi) \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\,d\xi,$$

и если справа поменять местами интегралы по теореме Фубини, то видно, что функция $u(x)$ должна совпадать с правой частью в (9) почти всюду. Теперь можно воспользоваться фактом из анализа: (обратное) преобразование Фурье от суммируемой функции – непрерывная ограниченная функция. Это, впрочем, легко проверяется. Более того, из (8) следует (7). Для проверки непрерывности $u(x)$ пишем

$$|u(x)-u(y)| \le \int |e^{i(x-y)\cdot\xi} - 1||\widetilde{u}(\xi)|\,d\xi$$

и разбиваем интеграл на интеграл по шару $O_R(0)$ и по его дополнению. При заданном $\varepsilon > 0$ интеграл по дополнению меньше $\varepsilon/2$, если R достаточно велико. При фиксированном R интеграл по шару меньше $\varepsilon/2$, если $|x-y|$ достаточно мал. □

Задача 1. Дополнительно покажите, используя аппроксимацию функции $\widetilde{u}(\xi)$ финитной гладкой функцией, что $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Задача 2. Проверьте, что $u(x)$ удовлетворяет равномерному условию Гёльдера порядка σ, если $0 < \sigma < s - n/2$:

$$|u(x)-u(y)| \le C_\sigma |x-y|^\sigma.$$

Указание:

$$\frac{|e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}|^2}{(1+|\xi|^2)^\sigma} \le \max_{t\ge 0} \frac{\min\{|x-y|^2t^2, 4\}}{(1+t^2)^\sigma} \le C'|x-y|^{2\sigma}.$$

Доказанная теорема легко обобщается следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $s \ge k + \frac{n}{2}$, где k – целое неотрицательное число. Тогда любая функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и ограничена вместе со*

своими производными до порядка k включительно. При этом справедливо неравенство

$$\sup |D^\alpha u(x)| \le C_k \|u\|_s \quad при \quad |\alpha| \le k, \tag{10}$$

где постоянная не зависит от x и α.

Добавим, что если u принадлежит пересечению всех пространств H^s, то это фактически бесконечно гладкая функция с ограниченными производными всех порядков.

1.3. Теперь выясним, как устроены соболевские пространства отрицательных порядков.

Теорема 4. *При целом положительном m пространство H^{-m} состоит из конечных сумм производных до порядка m в смысле обобщенных функций от функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что дифференцирование порядка m переводит функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ в функции из $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{u}(\xi) = Fu$. Тогда

$$w(\xi) = (1 + |\xi_1|^m + \cdots + |\xi_n|^m)^{-1} \widetilde{u}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

так как

$$0 \le C_1 \le \frac{1 + |\xi_1|^m + \cdots + |\xi_n|^m}{(1 + |\xi|^2)^{m/2}} \le C_2.$$

Поэтому

$$\widetilde{u}(\xi) = w(\xi) + \xi_1^m w_1(\xi) + \cdots + \xi_n^m w_m(\xi), \quad \text{где} \quad w_j(\xi) = \frac{|\xi|^m}{\xi^m} w(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Значит,

$$u = u_0 + D_1^m u_1 + \cdots + D_n^m u_n,$$

где все функции u_j принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. $\square$