ЛЕКЦИЯ 11.

Из последней теоремы следует, в частности, что *объединение пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ содержит все обобщенные функции с компактными носителями.* Действительно, мы доказали раньше, что такие обобщенные функции – конечные суммы производных в смысле обобщенных функций от непрерывных функций с компактными носителями.

1.4. Следующее предложение – миниатюрная модель для некоторых из будущих теорем теории эллиптических операторов.

Теорема 5. *Оператор $-1+\Delta$ изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.*

Это сразу видно из нашего определения соболевских пространств, так как в образах Фурье наш оператор действует как умножение на $1+|\xi|^2$. Соболевские пространства очень удобны для рассмотрения этого оператора. Дальше мы увидим, что они удобны для построения общей теории эллиптических операторов.

Вот ближайшее и очевидное обобщение:

Теорема 6. *Пусть s и t – любые вещественные числа. Тогда оператор*

$$\Lambda_t = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{t/2}F \tag{1}$$

изоморфно и изометрически отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ на пространство $H^{s-t}(\mathbb{R}^n)$.

Как мы увидим, оператор (1) – это пример эллиптического псевдодифференциального оператора порядка t. Это t-я степень оператора $1-\Delta$.

1.5. Пространство $\mathcal{S}$ содержится, конечно, во всех пространствах H^s.

Теорема 7. *При любом s пространство H^s совпадает с пополнением пространства $\mathcal{S}$ по норме $\|\cdot\|_s$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^s$. Тогда функция $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$ и может быть приближена в $L_2(\mathbb{R}^n)$ финитными бесконечно гладкими функциями $v_k(\xi)$. Запишем v_k в виде

$$v_k(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}w_k(\xi), \text{ где } w_k(\xi) = \frac{v_k(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}.$$

Конечно, $w_k(\xi)$ – тоже финитные бесконечно гладкие функции, и они сходятся к $\widetilde{u}(\xi)$ в пространстве L_2 с весом $(1+|\xi|^2)^s$. Их прообразы Фурье заведомо принадлежат $\mathcal{S}$ и сходятся к u в H^s. $\square$

Усилим последний результат.

Теорема 8. *При любом s пространство H^s является пополнением пространства $\mathcal{D}$ по норме пространства H^s.*

Доказательство. Достаточно показать, что любую функцию $u(x)$ из $\mathcal{S}$ можно аппроксимировать финитными бесконечно гладкими функциями по

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

норме пространства H^s. Более того, достаточно сделать это при целом неотрицательном s. Пусть $\varphi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \le 1$. Положим

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\varphi(\varepsilon x).$$

Тогда при любом α

$$D^\alpha[u_\varepsilon(x) - u(x)] = D^\alpha u(x) \cdot [\varphi(\varepsilon x) - 1] + \sum c_{\beta\gamma} D^\beta u(x) \cdot D^\gamma \varphi(\varepsilon x), \qquad (2)$$

где $\alpha = \beta + \gamma$ и $\gamma \neq 0$. Так как

$$D^\gamma \varphi(\varepsilon x) = \varepsilon^{|\gamma|}(D^\gamma \varphi)(\varepsilon x),$$

то ясно, что правая часть в (2) стремится к 0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$.

Следствие 1. *При $s' > s$ пространство $H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Следствие 2. *При любом s пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ можно определить как пополнение линеала $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ по норме в этом пространстве.*

Это относится и к норме при дробном $s > 0$, которую мы сейчас будем обсуждать.

1.6. Как мы видели, при натуральных s в H^s есть норма, которая записывается без преобразования Фурье. Сейчас мы укажем такую норму для дробных положительных s.

Теорема 9. *Пусть $s = k + \theta$, где k – натуральное число и $0 < \theta < 1$. Тогда норма в H^s эквивалентна норме, определяемой равенством*

$$\|u\|_s^{'2} = \|u\|_k^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 0$ и вычислим интеграл

$$\iint \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\, dx\, dy \qquad (4)$$

через преобразование Фурье $\widetilde{u}(\xi)$ функции $u(x)$, считая ее финитной и бесконечно гладкой. Результат, который мы получим, указан ниже в формуле (7). Этот интеграл сходится, так как на компакте $\operatorname{supp} u(x) \times \operatorname{supp} u(y)$ особенность при $x = y$ интегрируема, а вне этого множества интегрируемы $|u(x)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$ и $|u(y)|^2|x-y|^{-n-2\theta}$. Он допускает поэтому запись

$$\int \frac{1}{|z|^{n+2\theta}}\, dz \int |u(x+z) - u(x)|^2 dx. \qquad (5)$$

Внутренний интеграл в силу равенства Парсеваля с точностью до постоянного множителя равен

$$\int |e^{iz\cdot\xi} - 1|^2 |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Здесь

$$|e^{iz\cdot\xi}-1|^2=[\cos(z\cdot\xi)-1]^2+\sin^2(z\cdot\xi)=2-2\cos(z\cdot\xi)=4\sin^2[(z\cdot\xi)/2].$$

Обозначим через ϑ угол между векторами z и ξ. Меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, рассмотрим теперь интеграл

$$\int|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi\int\frac{\sin^2[(z\cdot\xi)/2]}{|z|^{n+2\theta}}\,dz. \tag{6}$$

Здесь внутренний интеграл равен

$$\int\sin^2\left(\tfrac{1}{2}|z||\xi|\cos\vartheta\right)\frac{dz}{|z|^{n+2\theta}}.$$

Перейдем здесь к сферическим координатам: $z=r\omega$, $dz=r^{n-1}dr\,dS$. После этого сделаем замену $\frac{1}{2}|\xi|r\cos\vartheta=\tau$. Получим с точностью до постоянного множителя

$$|\xi|^{2\theta}\int_S\cos^{2\theta}\vartheta\,dS\int_0^\infty\frac{\sin^2\tau}{\tau^{1+2\theta}}d\tau=C_\theta|\xi|^{2\theta}.$$

Мы показали, что

$$\iint\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy=C_\theta\int|\xi|^{2\theta}|\widetilde{u}(\xi)|^2d\xi. \tag{7}$$

Этот результат предельным переходом распространяется на $u\in H^\theta$. Этим теорема фактически доказана для $k=1$. На ненулевые k она распространяется автоматически. □

1.7. Рассмотрим вопрос о реализации пространства, сопряженного к пространству H^s, т.е. пространства линейных непрерывных функционалов над H^s. Таких реализаций имеется две.

Первая состоит в том, что поскольку H^s – гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,v)_s$, *общий вид линейного непрерывного функционала* $f(u)$ *над* H^s *есть*

$$f(u)=(u,v)_s, \tag{8}$$

где v *– любой фиксированный элемент из* H^s*, он однозначно определяется по* f.

Вторая состоит в использовании *двойственности между* H^s *и* H^{-s}. Дело в том, что *форма* $(u,v)_0$ *на* H^0 *продолжается на прямое произведение* $H^s\times H^{-s}$ *по формуле*

$$(u,v)_0=\int\widetilde{u}(\xi)\cdot\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi \tag{9}$$

и при этом так продолженная форма удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца

$$|(u,v)_0|\le\|u\|_s\|v\|_{-s}. \tag{10}$$

Последнее получается применением к

$$\int \widetilde{u}(\xi)\cdot\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)\cdot(1+|\xi|^2)^{-s/2}\overline{\widetilde{v}(\xi)}\,d\xi$$

обычного неравенства Шварца.

Теорема 10. *При любом s любой линейный непрерывный функционал $f(u)$ над H^s может быть представлен в виде*

$$f(u) = (u,v)_0, \tag{11}$$

где v – элемент из H^{-s}, однозначно определяемый по f. И обратно, при любом $v\in H^{-s}$ выражение (11) *есть линейный непрерывный функционал над H^s.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Чтобы доказать первое, положим $u_1 = \Lambda_s u$ (см. формулу (1)). Тогда $u_1\in H^0$ и $g(u_1) = f(u)$ – линейный непрерывный функционал над H^0. Следовательно,

$$f(u) = \int \widetilde{u}_1(\xi)\overline{\widetilde{v}_1(\xi)}\,d\xi = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}\widetilde{u}(\xi)\overline{\widetilde{v}_1(\xi)}\,d\xi,$$

где $v_1\in H^0$. Отсюда видно, что

$$f(u) = (u,v)_0 \text{ где } v = \Lambda_s v_1 \in H^{-s}. \quad \square.$$

1.8. Теперь мы обсудим условия, при которых оператор умножения на функцию $a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Для $s=0$ это известно: *в $L_2(\mathbb{R}^n)$ ограничен оператор умножения на ограниченную измеримую функцию.* Ее, конечно, достаточно считать ограниченной в существенном, т.е. ограниченной вне множества нулевой меры. Из сказанного сразу получается (с использованием формулы Лейбница для производной произведения)

Теорема 11. *Пусть m – натуральное число и функция $a(x)$ непрерывна и ограничена с производными до порядка $m-1$ включительно, а ее производные порядка m существуют и ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^m(\mathbb{R}^n)$.*

В частности, достаточно, чтобы функция $a(x)$ была непрерывна и ограничена с производными до порядка m включительно. Теперь рассмотрим дробные s.

Теорема 12. *Пусть m – целое число и $s = m+\theta$, $0<\theta<1$. Пусть функция $a(x)$ имеет непрерывные и ограниченные производные до порядка m включительно, а ее производные порядка m удовлетворяют равномерному условию Гёльдера с показателем $\vartheta\in(\theta,1]$. Тогда оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство проведем для $m=0$. Предполагая, что $u(x)\in H^\theta$, надо оценить величину

$$\iint \frac{|a(x)u(x)-a(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dx\,dy \tag{12}$$

через $\|u\|_\theta^2$. Ясно, что

$$|a(x)u(x) - a(y)u(y)|^2 \le 2|a(x)[u(x) - u(y)]|^2 + 2|[a(x) - a(y)]u(y)|^2.$$

Поэтому величина (12) не превосходит

$$2\sup|a(x)|^2\|u\|_\theta^2 + \int |u(y)|^2 I(y)\,dy,$$

где

$$I(x) = \int \frac{|a(x) - a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dy, \tag{13}$$

и дело сводится к проверке равномерной ограниченности этого интеграла. В силу нашего предположения о функции $a(x)$ подинтегральное выражение не превосходит $\mathrm{Const}\,|x-y|^{-n+2(\vartheta-\theta)}$ вблизи нуля и $\mathrm{Const}\,|x-y|^{-n-2\theta}$ на бесконечности, интеграл от этого выражения сходится и мажорируется постоянной, не зависящей от x, так что нужная равномерная ограниченность очевидна. □

Замечание 1. Как видно из доказательства, относительно производных $D^\alpha a(x)$ старшего порядка $|\alpha| = m$ достаточно предположить, что интегралы

$$J_\alpha(x) = \int \frac{|D^\alpha a(x) - D^\alpha a(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}}\,dy \tag{14}$$

сходятся и равномерно ограничены, по крайней мере, вне множества нулевой меры.

Замечание 2. В этих лекциях не было возможности затронуть вопросы интерполяции. На самом деле соболевские пространства в $\mathbb{R}^n$ образуют "интерполяционную шкалу". Из этого, в частности, следует, что так как оператор умножения на функцию $a(x)$ с ограниченными и непрерывными производными до порядка m включительно ограничен в H^{m-1} и H^m, то он ограничен в H^s при промежуточных s, т.е. при $m-1 < s < m$.

Рассмотрим теперь вопрос об ограниченности оператора умножения на $a(x)$ в H^s с *отрицательным* s. Здесь прежде всего возникает вопрос об определении. Следующая точка зрения приемлема. Пусть $u \in H^s$ и $\{u_n\}$ – последовательность из $\mathcal{D}$, сходящаяся к u в H^s. Тогда $au = \lim_{n\to\infty} au_n$, если этот предел существует в H^s и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{u_n\}$. Будем считать это *определением* оператора умножения на $a(x)$ в H^s при отрицательном s. Другая возможность – рассмотреть свертку в образах Фурье, мы не будем тратить на это время. Теперь заметим, что при $v \in H^{-s}$, $-s = |s|$, если оператор умножения на $a(x)$ ограничен в H^{-s},

$$(au_n, v)_0 = (u_n, av)_0 \to (u, \overline{a}v)_0. \tag{15}$$

Отсюда видна третья возможность, эквивалентная первой: оператор умножения на $a(x)$ в H^s, $s < 0$, *определяется* в этом случае соотношением

$$(au, v)_0 = (u, \overline{a}v)_0 \ \text{ при } \ v \in H^{-s}. \tag{16}$$

Очевидно, что операторы умножения на $a(x)$ и на $\overline{a(x)}$ одновременно ограничены в H^{-s} или нет. Получаем следующий вполне удобный результат:

Теорема 13. *Пусть s отрицательно и оператор умножения на $a(x)$ ограничен в $H^{|s|}$. Тогда он определятся в H^s соотношением* (16) *и ограничен в этом пространстве.*

Приведем еще такое пояснение. Мы знаем, что H^s и H^{-s} – сопряженные пространства. На финитных гладких функциях, конечно, $(au, v)_0 = (u, \overline{a}v)_0$, поэтому сопряженным к оператору умножения на a в H^s должен быть оператор умножения на $\overline{a}$. Оператор в данном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор ограничен в сопряженном пространстве. Отсюда видно, что условие ограниченности оператора умножения на a в $H^{|s|}$ в формулировке последней теоремы необходимо.

Рассмотрим теперь линейный оператор в частных производных с переменными коэффициентами

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{17}$$

Если все $a_\alpha(x)$ – ограниченные измеримые функции, то это ограниченный оператор из $H^m(\mathbb{R}^n)$ в $H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$.

В качестве некоторой подготовки к рассмотрению псевдодифференциальных операторов сформулируем

Следствие. *Оператор* (8) *с коэффициентами, имеющими непрерывные и ограниченные производные всех порядков, действует ограниченным образом из H^s в H^{s-m} при любом s.*