ЛЕКЦИЯ 12.

1.9. Рассмотрим вопрос о следе функции из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$, определяемой для удобства равенством $x_n = 0$. Положим $x = (x', x_n)$. Через F' обозначим преобразование Фурье функций от x' в функции от ξ'.

Теорема 14. *Пусть $s > 1/2$. Тогда для функций $u \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство*

$$\|u(x', 0)\|_{s-1/2, R^{n-1}} \le C \|u(x)\|_{s, R^n}, \tag{1}$$

где C – не зависящая от u постоянная.

Доказательство. Представим $F'[u](\xi', x_n)\big|_{x_n=0}$ в виде

$$F'[u](\xi', 0) = (2\pi)^{-1} \int F[u](\xi)\, d\xi_n.$$

Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|F'[u](\xi', 0)|^2 \le (2\pi)^{-2} \int |F[u]|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n.$$

Последний интеграл легко вычисляется подстановкой $\xi_n/(1 + |\xi|^2)^{1/2} = \tau$; с точностью до постоянного множителя он равен $(1 + |\xi'|^2)^{-s+1/2}$. Остается умножить на него обе части и проинтегрировать их по ξ'. $\square$

Эта теорема позволяет дать следующее определение следа функции u из H^s на R^{n-1} при $s > 1/2$.

Определение. Пусть $\{u_l\}$ – последовательность функций из $\mathcal{D}$, сходящаяся к u в H^s. Тогда она фундаментальна, и из (1) вытекает, что их следы на R^{n-1} образуют фундаментальную последовательность в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ввиду полноты этого пространства там есть предел. Более того, из (1) вытекает, что этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, так как любые две такие последовательности неограниченно сближаются в $H^s(\mathbb{R}^n)$. Этот предел и называется *следом* функции u на R^{n-1}, и он обозначается через $u(x', 0)$.

Для обычных непрерывных функций из H^s этот след очевидным образом совпадает с обычным следом. В силу (1) *оператор перехода к следу действует ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Теорему 14 доказал Л.Н. Слободецкий (1958). Он же показал на примере, что неравенство (1) теряет силу при $s = 1/2$. Времени на разбор этого примера у нас нет.

Из теоремы 14 следует, что *если $s > m + 1/2$, где m – натуральное число, и $a(D)$ – оператор в частных производных порядка m для простоты с постоянными коэффициентами, то для функций $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ выражение $a(D)u$ имеет след на $\mathbb{R}^{n-1}$, принадлежащий $H^{s-m-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, причем оператор перехода к этому следу ограничен в соответствующих нормах.*

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Позднее мы определим соболевские пространства в полупространстве, в частности, в $\mathbb{R}^n_+ = \{x : x_n > 0\}$. Для функций из этих соболевских пространств можно будет говорить об их граничных значениях на граничной гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$.

1.10. Здесь мы рассмотрим усреднения функции из H^s.

Пусть $\omega(x) \in \mathcal{D}$. Если $u \in H^s$ при некотором s, то, конечно, $u \in \mathcal{D}'$, так что определена свертка $u * \omega$, по крайней мере, в смысле обобщенных функций. В лекции 7 у нас доказано, что это бесконечно гладкая функция и

$$\operatorname{supp}(u * \omega) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \omega. \tag{2}$$

Предложение 1. *При* $u \in H^s$, $\omega \in \mathcal{D}$

$$F[u * \omega] = F[u]F[\omega]. \tag{3}$$

Доказательство. Такое соотношение доказано у нас, если $u \in \mathcal{S}'$. Утверждать, что $u \in \mathcal{S}$, мы не можем, но мы можем аппроксимировать u в H^s финитными бесконечно гладкими функциями u_n. Для них мы имеем

$$F[u_n * \omega] = F[u_n]F[\omega],$$

и здесь $F[u_n] \to F[u]$ в пространстве L_2 с весом $(1+|\xi|^2)^s$. Так как $F[\omega] \in \mathcal{S}$, то такая сходимость сохраняется после умножения на $F[\omega]$. Отсюда следует, что $u_n * \omega$ сходится в H^s. С другой стороны, можно доказать, что $u_n * \omega \to u * \omega$ в смысле обобщенных функций (ср. п. 9 в лекции 2). Поэтому $u_n * \omega \to u * \omega$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, и в пределе получается нужная формула (3). $\square$

Пусть теперь

$$\omega(x) \geq 0, \quad \omega(x) = 1 \ \text{ вблизи } \ 0, \quad \int \omega(x)\, dx = 1. \tag{4}$$

Положим при $h > 0$

$$\omega_h(x) = h^{-n}\omega\left(\frac{x}{h}\right). \tag{5}$$

Это дельтаобразное семейство при $h \to 0$. Свертку $u * \omega_h$ называют *усреднением* функции (или обобщенной функции) u.

Предложение 2.

$$u * \omega_h \to u \ \text{ в } \ H^s.$$

Доказательство. Как легко проверить, $F[\omega_h](\xi) = F[\omega](h\xi)$, и здесь правая часть – равномерно по h ограниченная функция, равномерно сходящаяся к $F[\omega](0) = 1$ в любом шаре $O_R = O_R(0)$. Поэтому $F[u]F[\omega_h] \to F[u]$ в пространстве L_2 с весом $(1 + |\xi|^2)^s$. Остается воспользоваться предложением 1. $\square$

1.11. Здесь мы докажем теорему о компактности, которая позднее даст очень важные следствия для соболевских пространств в ограниченных областях и на компактных многообразиях.

Теорема 15. *Пусть $s < s'$ и X – ограниченное множество в $H^{s'}$, причем носители всех элементов из X лежат в фиксированном компакте K пространства R^n. Тогда X предкомпактно в H^s, т.е. каждая последовательность $\{u_l\}$ элементов из X содержит подпоследовательность, сходящуюся в H^s.*

Доказательство. Так как каждую функцию u_l можно аппроксимировать ее усреднением с любой степенью точности, то предположим, не ограничивая общности, что $u_l \in \mathcal{D}$. При этом u_l имеют ограниченные нормы в $H^{s'}$ и носители, лежащие в фиксированном компакте K' (см. (2)). Пусть $v_l(\xi) = F[u_l]$.

Покажем, что в любом фиксированном шаре O_R эти функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Для этого возьмем функцию $\varphi \in \mathcal{D}$, равную 1 в окрестности компакта K'. Тогда $u_l(x) = u_l(x)\varphi(x)$ и поэтому

$$v_l(\xi) = \int v_l(\eta)\psi(\xi - \eta)\, d\eta,$$

где $\psi = F[\varphi]$. Отсюда в силу неравенства Шварца

$$|v_l(\xi)|^2 \le \|u_l\|^2_{s'} \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta)|^2 d\eta$$

и

$$|v_l(\xi) - v_l(\widetilde{\xi})|^2 \le \|u\|^2_{s'} \int (1 + |\eta|^2)^{-s'} |\psi(\xi - \eta) - \psi(\widetilde{\xi} - \eta)|^2 d\eta.$$

Теперь пользуемся быстрой сходимостью $\psi(\eta)$ к нулю при $\eta \to \infty$ и равномерной непрерывностью этой функции на любом компакте. Отсюда и видна равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций v_l в любом O_R.

Далее,

$$\|u_l - u_m\|^2_s = \int_{O_R} (1 + |\xi|^2)^s |v_l(\xi) - v_m(\xi)|^2 +$$
$$\int_{R^n \setminus O_R} (1 + |\xi|^2)^{s-s'} (1 + |\xi|^2)^{s'} \left[|v_l(\xi)|^2 + |v_m(\xi)|^2\right] d\xi.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать настолько большое R, что второй интеграл будет меньше $\varepsilon/2$ для всех l, m. Затем, пользуясь теоремой Арцела в применеинии к семейству функций v_l на шаре $\overline{O_R}$, мы можем указать такое N, что первый интеграл будет меньше $\varepsilon/2$ при некоторых $l, m > N$.

Отсюда ясно, что последовательность $\{u_l\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в H^s. □

2. Пространства Соболева на замкнутом многообразии. Пусть M – n-мерное бесконечно гладкое многообразие. Мы ограничимся случаем, когда M *замкнуто*, т. е. компактно и не имеет края. Каждая его точка имеет

на нем координатную окрестность, т.е. окрестность, в которой можно ввести локальные координаты, причем в пересечениях двух таких окрестностей переход от одних локальных координат к другим является невырожденным бесконечно гладким преобразованием. Ввиду компактности многообразие допускает покрытие конечным набором координатных окрестностей. Функция $u(x)$ на M называется *бесконечно гладкой*, если после перехода к локальным координатам получается бесконечно гладкая функция от этих координат. Отметим, что на M существует конечное разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_j(x) = 1, \tag{6}$$

состоящее из бесконечно гладких неотрицательных функций, носитель каждой из которых лежит в какой-нибудь координатной окрестности.

Соболевскую норму $\|u\|_s = \|u\|_{s,M}$ определим равенством

$$\|u\|^2_{s,M} = \sum_1^N \|u\varphi_j\|^2_{s,R^n}, \tag{7}$$

где функции φ_j образуют разбиение единицы и произведения $u\varphi_j$ рассматриваются как *перенесенные на* $\mathbb{R}^n$. Это означает, что после перехода к локальным координатам функция продолжается на $\mathbb{R}^n$ нулем вне ее носителя. Норма (7) зависит, конечно, от выбора разбиения единицы и локальных координат, но можно проверить, что *разные нормы эквивалентны*, т.е. их отношение заключено между положительными постоянными. *Пространство* $H^s(M)$ мы определим как пополнение пространства $C^\infty(M)$ по этой норме.

Заметим, что норме (7) отвечает скалярное произведение

$$(u,v)_{s,M} = \sum_1^N (\varphi_j^2 u, v)_{s,R^n}. \tag{8}$$

Поэтому H^s – *гильбертово пространство.*

Мы теперь перечислим свойства этих пространств. Соответствующие утверждения как правило легко выводятся из определения и из аналогичных утверждений для $\mathbb{R}^n$, так что пояснения будут короткими.

1. Если $u \in H^s(M)$ и φ – функция из $C^\infty(M)$ с носителем, лежащим в координатной окрестности, то перенесение функции φu на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. *Пространство* $H^0(M)$ *совпадает с пространством квадратично интегрируемых функций* $L_2(M)$. (Скалярное произведение в $L_2(M)$ определяем формулой (8) и вдаваться в обсуждение других вариантов его определения не будем. Один из вариантов состоит в том, что многообразие рассматривается как вложенное в $\mathbb{R}^N$, $N > n$, и на M берется мера, индуцированная из $\mathbb{R}^N$.) *При* $s' > s$ *имеет место вложение пространства* $H^{s'}(M)$ *в* $H^s(M)$, *оператор вложения непрерывен и, более того, вполне непрерывен.* Последний

факт очень важен, он следует из теоремы 15. *Пространство* $H^{s'}(M)$ *плотно в* $H^s(M)$ *при* $s' > s$. Пространство $C^\infty(M)$ плотно во всех $H^s(M)$.

3. При $s > n/2$ функция из $H^s(M)$ непрерывна после подходящего изменения на множестве нулевой меры (и даже локально удовлетворяет условию Гёльдера порядка θ в локальных координатах, если $0 < \theta < n/2 - s$, $\theta \le 1$. Более того, *пространство* $H^s(M)$ *непрерывно вложено в пространство* $C^0(M)$ *непрерывных функций с нормой* $\max|u|$.

При $s > m + n/2$ с натуральным m функции из $H^s(M)$ локально непрерывно дифференцируемы до порядка m после возможного изменения на множестве нулевой меры. Несложно определить пространство $C^m(M)$, используя разбиение единицы, и проверить непрерывность вложения $H^s(M)$ в $C^m(M)$. Пересечение всех пространств $H^s(M)$ по существу совпадает с $C^\infty(M)$.

4. Используя разбиение единицы, локальные координаты и форму

$$\langle u, v\rangle = (u, \overline{v})_{0,M}, \tag{9}$$

можно ввести *обобщенные функции на* M – линейные непрерывные функционалы над пространством $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$. Мы эту возможность раньше не обсуждали.

Пространство $H^{-m}(M)$ с натуральным m состоит из таких обобщенных функций из $\mathcal{E}'(M)$, что локально, в локальных координатах, они являются производными в смысле обобщенных функций до порядка m от функций из $L_2(M)$.

Отсюда на самом деле следует, что объединение всех соболевских пространств на $H^s(M)$ содержит все обобщенные функции на M.

5. *Пространство линейных непрерывных функционалов над* H^s *можно отождествить*: 1) *с* $H^s(M)$, *используя форму* $(u, v)_{s,M}$; 2) *с* $H^{-s}(M)$, *используя продолжение формы* $(u, v)_{0,M}$ *на* $H^s(M) \times H^{-s}(M)$.

Здесь легко проверяются первое утверждение и *обобщенное неравенство Шварца*

$$|(u, v)_{0,M}| \le C\|u\|_{s,M}\|v\|_{-s,M}. \tag{10}$$

В силу этого неравенства форма $(u, v)_{0,M}$ продолжается до ограниченной формы на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$ и при фиксированном $v \in H^{-s}(M)$ определяет линейный непрерывный функционал над $H^s(M)$. Однако для доказательства того, что это общий вид линейного непрерывного функционала на $H^s(M)$, нужно при любых t, σ иметь линейный оператор $\Lambda_{t,\sigma}$, непрерывно отображающий $H^\sigma(M)$ на $H^{\sigma-t}(M)$ и обратимый. Такой оператор, не зависящий от σ, легко строится в теории эллиптических псевдодифференциальных операторов на M.

6. *Оператор умножения на функцию из* $C^k(M)$ *ограничен в* $H^s(M)$ *при* $|s| \le k$. *Оператор умножения на бесконечно гладкую функцию ограничен во всех* $H^s(M)$.

Эти утверждения легко проверяются; мы не будем их уточнять.