ЛЕКЦИЯ 13

3. Соболевские пространства в ограниченной области и в полупространстве. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой $(n-1)$-мерной границей, и пусть s – неотрицательное число. Возможны три определения пространства $H^s(\Omega)$.

Определение 1. Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как пополнение пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$ при целом $s=m$ по норме, определяемой равенством

$$\|u\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx, \tag{1}$$

и при дробном $s = m+\theta$, $0<\theta<1$, по норме, определяемой равенством

$$\|u\|^2_{s,\Omega} = \|u\|^2_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\theta}} dx\, dy. \tag{2}$$

При $\theta = 0$ функции из $C^m(\overline{\Omega})$ лежат в этом пространстве, и вместо $C^\infty(\overline{\Omega})$ достаточно рассматривать пополнение пространства $C^m(\overline{\Omega})$. При $\theta>0$ достаточно рассмотреть пополнение пространства $C^{m+\theta'}(\overline{\Omega})$ функций с производными порядка m, удовлетворяющими равномерному условию Гёльдера порядка $\theta' \in (\theta, 1]$.

Определение 2. Функция $u(x)$ принадлежит $H^s(\Omega)$, если она является сужением на Ω функции $v(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$. При этом норма $\|u\|'_{s,\Omega}$ определяется как нижняя грань норм функций $v(x)$ из $H^s(\mathbb{R}^n)$, сужения которых на Ω совпадают с $u(x)$.

О значениях $u(x)$ на границе можно не беспокоиться, так как все функции рассматриваются с точностью до их значений на множестве нулевой меры.

Определение 3. Пусть $s = m+\theta$, где m – целое неотрицательное число и $0 \le \theta < 1$. Пространство $H^s(\Omega)$ состоит из таких квадратично интегрируемых функций в Ω, что их производные до порядка m включительно в смысле обобщенных функций в $\mathcal{D}'(\Omega)$ – квадратично интегрируемые функции и при $\theta>0$ конечна величина (2). Норма в этом пространстве определяется формулой (1) при $\theta = 0$ и (2) при $\theta > 0$.

Совершенно такие же определения даются для соболевских пространств $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ с неотрицательным s, где $\mathbb{R}^n_+$ – полупространство в $\mathbb{R}^n$, определяемое неравенством $x_n > 0$. Но в этом случае в первом определении берутся функции с компактными носителями в замкнутом полупространстве.

Более общие области в $\mathbb{R}^n$ мы рассматривать не будем.

Теорема 1. *Определения* 1 – 3 *эквивалентны.*

наметим сначала для полупространства. Не вызывает сомнений, что при аппроксимации функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ гладкими финитными функциями их сужения на $\mathbb{R}^n_+$ сходятся в норме $\|\cdot\|_{s,R^n_+}$. Поэтому сужения функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^n_+$ принадлежат $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 1. Пусть теперь $u(x)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n_+)$ в смысле определения 1. Для ее продолжения до функции v из

$H^s(\mathbb{R}^n)$ можно использовать следующие формулы, предложенные Хестенсом (Hestenes, 1941) для гладкого продолжения гладких функций:

$$v(x) = u(x) \ \text{ при } \ x_n > 0,$$
$$v(x', x_n) = \sum_1^{l+1} \lambda_\nu u\left(x', -\frac{1}{\nu}x^n\right) \ \text{ при } \ x^n < 0, \tag{3}$$

где числа λ_ν определяются системой уравнений

$$\sum_1^{l+1} \left(-\frac{1}{\nu}\right)^j \lambda_\nu = 1 \quad (j = 0, \ldots, l). \tag{4}$$

Пусть для простоты $\theta = 0$. (В этой лекции в доказательствах мы ограничиваемся этим случаем.) Возьмем $l = m$. Если $u \in C_0^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, то проверяется, что после продолжения получается функция v, принадлежащая $C_0^m(\mathbb{R}^n)$ и при этом

$$||v||_{m,R^n} \le C_m ||u||_{m,R_+^n}, \tag{5}$$

где постоянная не зависит от u. Если $\{u_l\}$ – последовательность функций из $C_0^m(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, сходящаяся к данной функции u по норме $||\cdot||_{m,\mathbb{R}_+^n}$, то $\{v_l\}$ сходится к некоторой функции $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, и можно проверить, что формулы (3) сохраняются для v. Таким образом, построен ограниченный *оператор продолжения* функций из $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ (в смысле первого определения) до функций из $H^m(\mathbb{R}^n)$. Нормы в определениях 1 и 2 оказываются эквивалентными. Этим показано, что определения 1 и 2 эквивалентны.

Эквивалентность определений 2 и 3 проверяется аналогично. Если функция принадлежит $H^m(\mathbb{R}^n)$, то она квадратично интегрируема по $\mathbb{R}^n$ с производными $D^\alpha u$, $|\alpha| \le m$, и ее сужение на $\mathbb{R}_+^n$ принадлежит $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ в смысле определения 3. Обратно, если $u(x)$ принадлежит $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ в смысле определения 3, то ее продолжение до функции из $H^m(\mathbb{R}^n)$ строится при помощи того же оператора, что и выше.

Заметим, что правую часть в (3) можно умножить на любую функцию $\psi(x_n)$ из $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+})$, равную 1 вблизи начала.

В случае ограниченной области Ω рассуждение остается в основном таким же, но оператор продолжения строится следующим образом. Функция $u(x)$ умножается на бесконечно гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_\nu = 1 \tag{6}$$

в $\overline{\Omega}$. Здесь носитель функции φ_1 лежит внутри Ω, а носители остальных φ_ν лежат в координатных полуокрестностях, в которых возможно выпрямление границы при помощи бесконечно гладкой невырожденной замены координат. Каждая из функций $u\varphi_\nu$ продолжается через плоскую границу при помощи описанного выше оператора. Можно позаботиться о том, чтобы продолженные функции можно было сложить и получить функцию на $\mathbb{R}^n$. $\square$

Оператор продолжения, которым мы воспользовались, на самом деле годится при всех $s \le l$ и достаточно гладкой границе. (Не будем останавливаться на уточнениях.) Сили (R.T. Seeley, 1964) построил его модификацию, пригодную сразу при всех s в случае бесконечно гладкой границы. Более сложный оператор продолжения строится и используется при липшицевой границе, т.е. границе, локально являющейся графиком функции, удовлетворяющей условию Липшица (см. И. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Мир, 1973).

Приведем теперь перечень важнейших свойств пространств $H^s(\Omega)$.

1. Пространство $H^0(\Omega)$ совпадает с $L_2(\Omega)$. При $s' > s$ пространство $H^{s'}(\Omega)$ непрерывно и вполне непрерывно вложено в $H^s(\Omega)$. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω остается только утверждение о непрерывности вложения.

2. При $s > n/2$ пространство $H^s(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$, при $s > k+n/2$, где k – натуральное число, – в $C^k(\overline{\Omega})$. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω добавляются утверждения об ограниченности функций или ограниченности с производными до порядка k включительно.

3. При $s > 1/2$ функции из $H^s(\Omega)$ имеют граничные значения на границе Γ области Ω, принадлежащие $H^{s-1/2}(\Gamma)$, при этом оператор перехода к граничным значениям действует ограниченным образом в соответствующих соболевских пространствах. В случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω речь идет о граничных значениях на граничной гиперплоскости.

4. Все пространства $H^s(\Omega)$ являются гильбертовыми. Скалярные произведения, отвечающие нормам (1) и (2), легко выписываются. Пространство, сопряженное к $H^s(\Omega)$, можно поэтому отождествить с этим пространством. Аналогично обстоит дело в случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω.

5. Оператор умножения на функцию $a(x)$ из $C^k(\overline{\Omega})$ ограничен в $H^s(\Omega)$ при $0 \le s \le k$. В случае полупространства $\mathbb{R}^n_+$ то же верно, если $a(x)$ принадлежит $C^k_b(\mathbb{R}^n_+)$.

Соболевские пространства с отрицательными индексами в Ω в $\mathbb{R}^n_+$ тоже можно определить, но это нет смысла обсуждать наспех. Мы только наметим определение. Сначала при $s \ge 0$ вводится подпространство $H^s_0(\Omega)$ (в $H^s(\Omega)$) – пополнение пространства $C^\infty_0(\Omega)$ по норме в $H^s(\Omega)$. Это подпространство совпадает с $H^s(\Omega)$ при $s \le 1/2$ и не совпадает с ним при $s > 1/2$. Пространство $H^{-s}(\Omega)$ определяется как сопряженное к $H^s_0(\Omega)$ относительно формы $(u,v)_{0,\Omega}$ (точнее, ее продолжения). Аналогично обстоит дело в случае $\mathbb{R}^n_+$ вместо Ω. При $s = 1/2$ имеется другой разумный вариант определения, на этом не останавливаемся. См. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир, 1971.

Можно еще рассмотреть соболевские пространства на компактном гладком n-мерном многообразии M с ($(n-1)$-мерным) краем ∂M. Такое многообразие допускает конечное покрытие координатными окрестностями некоторых внутренних точек и "координатными полуокрестностями" некоторых точек края. Соболевская норма неотрицательного порядка s на таком многообразии определяется при помощи разбиения единицы, подчиненного такому покрытию. При этом в координатных окрестностях после перехода к соответствующим локальным координатам используются нормы того же порядка в $\mathbb{R}^n$, а в координатных полуокрестностях – в $\mathbb{R}^n_+$. Ограниченная область с гладкой границей – частный случай. В общем случае свойства соболевского пространства $H^s(M)$ аналогичны. Удобно также рассматривать M как часть замкнутого многообразия M_0, тогда пространство $H^s(M)$ можно определить как состоящее из сужений на M функций из $H^s(M_0)$.

Другое обозначение для пространств H^s такое: W_2^s. Более общие пространства W_p^s в этих лекциях не затрагивались.

В прочитанных лекциях псевдодифференциальные операторы неоднократно упоминались, но подробно удалось расказать только об обобщенных функциях и соболевских пространствах. В следующем семестре псевдодифференциальные операторы будут изучаться систематически. Ниже приводится план.

ПДО (псевдодифференциальные операторы) в R^n класса $S^{1,0}$ и "классические" ПДО – обобщения дифференциальных операторов. Символ и главный символ. Исчисление ПДО. Эллиптичность, параметрикс эллиптического ПДО. Ограниченность в соболевских пространствах H^s. Переход от представления ПДО интегралами типа Фурье к их представлению интегралами типа свертки и описание ядер интегральных операторов, которые являются псевдодифференциальными операторами. ПДО нулевого порядка и сингулярные интегральные операторы.

ПДО на замкнутом многообразии. Эквивалентность эллиптичности и фредгольмовости в соболевских пространствах. Индекс эллиптического оператора, его гомотопическая инвариантность, аналитическая формула для индекса. Условия, достаточные для равенства индекса нулю. Эллиптичность с параметром и обратимость при больших значениях параметра. ПДО на окружности и торе: представление рядами типа Фурье.

Компактные ПДО и эллиптические ПДО с дискретным спектром. Спектральные свойства самосопряженных эллиптических ПДО ненулевого порядка на замкнутом многообразии; на окружности. Слабые возмущения самосопряженных эллиптических ПДО. ПДО, далекие от самосопряженных. Приложения к спектральным граничным задачам для классических уравнений математической физики. Функции от эллиптического ПДО A: степень A^s, экспоненты e^{-tA} и e^{itA}, ζ-функция, связи между ними.