ЛЕКЦИЯ 2.

Итак, мы рассматриваем свертку

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy. \tag{1}$$

Она *коммутативна*:

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi. \tag{2}$$

Это легко проверяется при помощи замены переменных в интеграле (1): $x-y = \widetilde{x}$.

Следствие: если обе функции бесконечно гладкие и для простоты одна финитна, то

$$(\partial^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (\partial^\alpha \psi). \tag{3}$$

Свертка, кроме того, *ассоциативна*:

$$(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi) \tag{4}$$

(если для простоты хотя бы две из трех функций финитны), так что можно писать $\varphi * \psi * \chi$. Немного громоздкую проверку пока пропустим.

7. Дельтаобразные последовательности. Последовательность $\{f_n\}$ обычных функций называется *дельтаобразной*, если соответствующие регулярные обобщенные функции стремятся к $\delta(x)$ при $n \to \infty$. Можно, конечно, говорить и о дельтаобразном семействе $\{f_\varepsilon\}$, $\varepsilon \to 0$. Они часто полезны в анализе. Обсудим один из способов построения и построим дельтаобразное семейство основных функций.

Возьмем функцию $\varphi_1 \in \mathcal{D}$ со следующими свойствами:

$$\varphi_1(x) \geq 0, \quad \varphi_1(x) = 0 \ \text{ при } \ |x| \geq 1, \quad \int \varphi_1(x)\,dx = 1. \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{6}$$

Очевидно, что $\int \varphi_\varepsilon\,dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geq \varepsilon$. Поэтому

$$\langle \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \int_{|x|\leq\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)[\psi(x) - \psi(0)]\,dx + \psi(0)$$

стремится к $\psi(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Значит, (6) – дельтаобразное семейство.

8. Носители обычных и обобщенных функций. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ непрерывной функции $f(x)$ называется замыкание множества точек, в которых она отлична от нуля. Функция $f(x)$ называется финитной, если ее носитель компактен. Линеал, состоящий из финитных непрерывных функций, обозначается через $C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Пусть f – обобщенная функция из $D'(\mathbb{R}^n)$ и O – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что $f = 0$ в O, если $\langle f, \varphi \rangle = 0$ для всех основных функций с носителями в O. *Носителем* $\operatorname{supp} f$ обобщенной функции f называется наименьшее замкнутое множество, вне которого она равна нулю. Если f – функционал типа непрерывной функции, то это определение согласуется с предыдущим. Обобщенная функция с компактным носителем называется *финитной*.

Пример: носитель дельта-функции $\delta(x-x_0)$ и любой ее производной – точка x_0. Говорят, что такие обобщенные функции *сосредоточены в точке* x_0.

Сформулируем две теоремы (они будут доказаны позднее).

Теорема 1. *Любая обобщенная функция, сосредоточенная в одной точке x_0, является конечной линейной комбинацией дельта-функции $\delta(x - x_0)$ и ее производных*:

$$f = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x - x_0). \tag{7}$$

Теорема 2. *Любая финитная обобщенная функция является конечной суммой производных некоторого порядка в смысле обобщенных функций от финитных непрерывных функций*:

$$f = \sum_{|\alpha| \le l} \partial^\alpha f(x), \quad f(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Линеал, состоящий из финитных обобщенных функций, обозначается через $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Он *плотен в* $\mathcal{D}'$, так как если φ – основная функция, равная 1 в окрестности начала, то любая обобщенная функция f есть предел произведений $\varphi(x/m)f$ при $m \to \infty$.

9. Свертка обобщенных функций. Мы ограничимся определением свертки двух обобщенных функций, из которых хотя бы одна финитна.

Пусть сначала $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, $g(x)$ финитна. Тогда

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \iint f(x-y) g(y)\, dy\, \varphi(x)\, dx.$$

Заменим $x - y$ на $\widetilde{x}$ и затем $\widetilde{x}$ на x. Меняя порядок интегрирования (по соответствующей теореме из анализа или по теореме Фубини), получаем, что правая часть равна

$$\int f(x) \int g(y) \varphi(x+y)\, dy\, dx,$$

т.е.

$$\langle (f * g)(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle. \tag{9}$$

Справа во внутренних угловых скобках $g(y)$ действует на $\varphi(x+y)$ как на функцию от y; x играет роль параметра. Получается основная функция от x (проверьте), на нее и действует $f(x)$ во внешних угловых скобках.

Пусть теперь $f \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{E}'$. Принимая последнюю формулу за образец, полагаем

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(x+y) \rangle_y \rangle_x. \tag{10}$$

Индексы справа указывают, по каким переменным действуют обобщенные функции g и f. Внутренние угловые скобки определяют основную функцию от x. Это видно из теоремы 2: если

$$g = \sum_{|\beta|\le m} \partial^\beta g(x), \qquad g(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

то

$$\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y = \sum_{|\beta|\le m} (-1)^{|\beta|} \int g_(y) \partial^\alpha \varphi(x+y)\, dy.$$

Конечно, если и f финитна, то в (10) можно поменять f и g ролями. Получается одно и то же (с использованием (8) и (11)):

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \iint f(x) g(y) \partial^{\alpha+\beta} \varphi(x+y)\, dx\, dy. \tag{12}$$

Пример. $f * \delta(x) = f$ для любой обобщенной функции f.

Действительно, $\langle \delta(y), \varphi(x+y)\rangle_y = \varphi(x)$.

Замечание. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$ и мы хотим рассматривать свертку $f * g$ только на основных функциях $\varphi(x)$ с носителями в K. Тогда носители основных функций $\langle g, \varphi(x+y)\rangle_y$ тоже лежат в некотором компакте K_1. Это позволяет заменить f на ψf, где ψ – основная функция, равная 1 в окрестности компакта K_1. Поэтому часто удобно считать, что в свертке $f * g$ финитны и f, и g.

Отметим следующие свойства свертки, для простоты пока предполагая, что рассматриваемые обобщенные функции финитны.

1. *Коммутативность*: $f * g = g * f$. Она уже проверена.
2. *Формула для производных*: $\partial^\gamma (f * g) = (\partial^\gamma f) * g = f * (\partial^\gamma g)$.
3. *Ассоциативность* $(f * g) * h = f * (g * h)$; можно писать $f * g * h$.
4. *Непрерывность*: если $f_n \to f$, то $f_n * g \to f * g$ (ограничимся эти утверждением).
5. Если $f \in \mathcal{E}'$ и $g \in \mathcal{D}$, то $f * g \in \mathcal{D}$.

Наметим доказательство. Утверждение 2 проверяется при помощи формулы (12). Утверждение 3 проверяется при помощи формулы типа (12) для сверток $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$. Например, если все три обобщенные функции финитны и непрерывны, то

$$\langle (f * g) * h, \varphi\rangle = \iiint f(x) g(y) h(z)\, dx\, dy\, dz = \langle f * (g * h), \varphi\rangle.$$

Этим мы проверили и (4) для финитных непрерывных функций. Утверждение 4 следует из определения (10). Утверждение 5 проверьте самостоятельно, используя утверждение 2 и формулу (8).

Теорема. *Пространство $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{E}'$ плотно в $\mathcal{D}$, то достаточно проверить, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{E}'$. Если $f \in \mathcal{E}'$, то возьмем дельтаобразную последовательность $\varphi_j(x)$ основных функций (см. п. 7); имеем (см. свойства свертки 4 и 5)

$$f * \varphi_j \to f * \delta(x) = f,$$

и здесь $f * \varphi_j \in \mathcal{D}$. □

10. Решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях. Рассмотрим сначала уравнение

$$Lu(x) =: u^{(m)} + a_1(x)u^{(m-1)} + \cdots + a_m(x)u = f(x) \tag{13}$$

с бесконечно гладкими коэффициентами и бесконечно гладкой правой частью.

Теорема. *Любое решение уравнения* (13) *в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ является обычным бесконечно гладким решением.*

Доказательство. Уравнение (13) сначала сводится к однородному уравнению (вычитанием частного решения, которое существует на всей оси и является бесконечно гладким). Затем однородное уравнение известным образом сводится к системе 1-го порядка

$$U'(x) = A(x)U(x) \tag{14}$$

с бесконечно гладкой матрицей $A(x)$. Достаточно проверить, что ее обобщенные решения являются обычными бесконечно гладкими решениями. Пусть $\Phi(x)$ – фундаментальная матрица этой системы. Она существует и является невырожденной и бесконечно гладкой на всей оси. Положим $U = \Phi(x)V$. Для V получается уравнение $V' = 0$. Осталось показать, что любое решение скалярного уравнения $v' = 0$ в $\mathcal{D}'$ – постоянная.

Пусть φ_0 – фиксированная функция из $\mathcal{D}$ с $\int \varphi_0\,dx = 1$. Тогда любую функцию φ из $\mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\varphi = \psi + h\varphi_0, \quad \text{где} \quad h = \int \varphi\,dx \quad \text{и} \quad \int \psi\,dx = 0.$$

Функция ψ определяется написанным равенством. Это производная от функции

$$\int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt,$$

принадлежащей $\mathcal{D}$. Поэтому

$$\langle v, \psi\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle v, \varphi\rangle = hC,$$

где $C = \langle v, \varphi_0\rangle$. С другой стороны,

$$\langle C, \varphi\rangle = C\int \psi\,dx + hC\int \varphi_0\,dx = hC.$$

Мы видим, что $v = C$. □