ЛЕКЦИЯ 3.

Определим более общие пространства основных и обобщенных функций. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

это пространство бесконечно гладких функций в Ω с компактными носителями (лежащими внутри Ω). Как и в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, это линейное пространство, и сходимость в нем определяется так: $\varphi_j \to \varphi$, если носители всех этих функций лежат в фиксированном компакте $K \subset \Omega$ и на нем $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно при любом α. *Пространство* $\mathcal{D}'(\Omega)$ определим как состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(\Omega)$. В этом пространстве, как и в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, есть дифференцирование, умножение на бесконечно гладкие функции (определенные в Ω) и сходимость (слабая).

В частности, если $n = 1$, то можно взять $\Omega = (a, b)$. Теорема о том, что все решения обыкновенного дифференциального уравнения с бесконечно гладкими коэффициентами и правой частью являются обычными бесконечно гладкими решениями, распространяется на случай интервала (a, b) вместо оси, доказательство сохраняется.

В случае дифференциального оператора с переменными коэффициентами будем писать $L = L(x, \partial)$, в случае оператора с постоянными коэффициентами $L = L(\partial)$. Здесь $\partial = d/dx$.

Теперь рассмотрим оператор с постоянными коэффициентами:

$$Lu(x) = L(\partial)u(x) := u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots + a_m u. \tag{2}$$

Определим *фундаментальное решение уравнения* $Lu = 0$ как такую функцию $\mathcal{E}(x)$, что $L\mathcal{E}(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций на оси. (Тут традиционна не вполне правильная терминология; Г.Е. Шилов пытался говорить "фундаментальная функция оператора L". Но классики говорили "фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$" еще до появления обобщенных функций. В каком смысле, увидим.)

Сейчас мы укажем способ построения фундаментального решения и покажем, что это функционал типа функции.

Первая идея состоит в том, чтобы положить $\mathcal{E}(x) = u_1(x)$ при $x > 0$, $u_2(x)$ при $x < 0$, где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – два решения однородного уравнения $Lu = 0$, они определены на всей оси (это линейные комбинации функций из фундаментальной системы решений). Но фундаментальное решение определено, конечно, с точностью до прибавления решения однородного уравнения. Поэтому из него можно вычесть $u_1(x)$. Теперь будем искать фундаментальное решение в виде функции

$$\mathcal{E}(x) = \theta(x)u(x), \tag{3}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда и $u(x)$ – (бесконечно гладкое) решение уравнения $Lu = 0$ на оси. Сейчас мы увидим, что дело сводится к подбору данных Коши для $u(x)$ в точке 0.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Дифференцируя кусочно-гладкую функцию $\mathcal{E}(x)$ в смысле обобщенных функций (см. п. 2), получаем

$$\mathcal{E}'(x) = \delta(x)u(0) + \theta(x)u'(x).$$

Положим $u(0) = 0$, чтобы при следующем дифференцировании не появилась производная дельта-функции. Теперь

$$\mathcal{E}''(x) = \delta(x)u'(x) + \theta(x)u''(x).$$

Если m велико, мы положим $u'(0) = 0$. И т. д. Окончательно полагаем

$$u(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1, \tag{4}$$

этим исчерпывается возможность выбора данных Коши. Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} L\mathcal{E}(x) &= [\delta(x)u^{(m-1)}(0) + u^{(m)}(x)] + a_1 u^{(m-1)}(x) + \cdots + a_m u(x) \\ &= \delta(x) + Lu(x) = \delta(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. Фундаментальное решение построено, это бесконечно гладкая вне начала функция, ее производные в нуле до порядка $m-2$ непрерывны, а производная порядка $m-1$ имеет скачок.

Определение. Обобщенная функция f называется *бесконечно гладкой в области* $O \subset \mathbb{R}^n$, если она действует как функционал типа бесконечно гладкой функции $f(x)$ на основные функции с носителями в O. *Сингулярным носителем* обобщенной функции f называется наименьшее замкнутое множество, вне которого эта функция является бесконечно гладкой. Обозначение: $\operatorname{sing\,supp} f$.

Например, сингулярный носитель дельта-функции $\delta(x - x_0)$ и любой ее производной – точка x_0. Сингулярный носитель только что построенного фундаментального решения – начало координат.

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lu = f \tag{5}$$

с постоянными коэффициентами. Справа – обычная или обобщенная функция для простоты с компактным носителем. Надо научиться строить частное решение; общее решение получается прибавлением обычного бесконечно гладкого решения однородного уравнения. Это легко:

$$u_0 = \mathcal{E}(x) * f \tag{6}$$

– *частное решение уравнения* (5), так как

$$Lu_0 = (L\mathcal{E}(x)) * f = \delta(x) * f = f.$$

Мы видим, в частности, что построение фундаментального решения и вычисление свертки (6) заменяет процедуру вариации произвольных постоянных (разница на самом деле невелика).

Отметим, что классики определяли фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ как такую функцию $\mathcal{E}(x)$, что для уравнения $Lu = f(x)$ (справа обычная функция) формула

$$u_0(x) = \int E(x-y)f(y)\,dy$$

дает частное решение.

Фундаментальное решение можно определить и для уравнения с переменными коэффициентами. Это такая обобщенная функция $\mathcal{E}(x,y)$ по x, зависящая от параметра y, что

$$L(x,\partial_x)\,\mathcal{E}(x,y) = \delta(x-y).$$

Его можно строить, если известна фундаментальная система решений однородного уравнения. Подумайте, как.

12. Другие пространства обычных и обобщенных функций. Вот список пространств, которые нужны дальше.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) &\quad \text{и} \quad \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),\\
\mathcal{D}(\Omega) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(\Omega),\\
\mathcal{E}(\Omega) &\quad \text{и} \quad \mathcal{E}'(\Omega),\\
\mathcal{D}(K) &\quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(K).
\end{aligned}$$

Мы сейчас определим те из этих пространств, которые еще не встречались. Все эти пространства линейны. Пространства в первых трех строчках связаны следующими включениями:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{7}$$

Пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – это пространство Лорана Шварца *быстро убывающих бесконечно гладких функций.* Оно состоит из таких бесконечно гладких функций $\varphi(x)$, что все произведения $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ ограничены (каждое своей постоянной). В нем можно ввести последовательность норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|+|\beta|\le m; x} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

Сходимость в этом пространстве определяется так: $\varphi_j \to \varphi$, если $\|\varphi_j - \varphi\|_m \to 0$ при всех m.

Пространство $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (тоже Шварца) состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; Шварц их назвал *умеренными распределениями.*

Этому пространству принадлежит функционал типа локально интегрируемой функции $g(x)$, удовлетворяющей неравенству вида

$$|g(x)| \le C(1+|x|)^N \tag{9}$$

при каком-нибудь натуральном N. Такие функции называют *медленно растущими.*

В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ определены дифференцирование и умножение на бесконечно гладкую функцию, у которой каждая производная есть функция медленного роста (проверьте), и (слабая) сходимость.

Будет доказана

Теорема. *Общий вид обобщенной функции f из $\mathcal{S}'$ – это производная некоторого порядка в смысле обобщенных функций от непрерывной функции умеренного роста:*

$$f = \partial^\alpha g(x),$$

где непрерывная функция $g(x)$ удовлетворяет неравенству вида (8).

Пространство $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех бесконечно гладких функций. Сходимость в нем определяется как равномерная сходимость со всеми производными на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^n$: $\varphi_j \to \varphi$, если $\partial^\alpha \varphi_j(x) \to \partial^\alpha \varphi(x)$ равномерно на любом компакте при любом α. Можно определить *полунормы*, например, следующим образом:

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha| \le m-1, |x| \le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \qquad m = 1, 2, \dots. \tag{10}$$

Полунорма отличается от нормы тем, что из ее равенства нулю на данной функции не следует, что эта функция равна нулю. Ясно, что $\varphi_j \to \varphi$ в этом пространстве, если $\|\varphi_j - \varphi\|_m \to 0$ при всех m.

Пространство $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – это уже знакомое нам пространство обобщенных функций с компактными носителями. Нам предстоит показать, что оно совпадает с пространством линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}$. Это потребует некоторой подготовки.

В этом пространстве определены дифференцирование, умножение на бесконечно гладкую функцию и (слабая) сходимость.

Пространство $\mathcal{E}(\Omega)$ – это бесконечно гладкие функции в области Ω. Сходимость – равномерная со всеми производными на компактах, лежащих внутри Ω. В частности, полунормы можно определить при помощи компактов

$$\{x \in \Omega : |x| \le m,\ \rho(x, \partial\Omega) \ge 1/m\}, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где $\rho(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ области Ω. Выпишите эти полунормы.

Пространство $\mathcal{D}(K)$ состоит из всех функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в заданном компакте K. (Вместо $\mathbb{R}^n$ можно взять область Ω, содержащую K.) Естественные нормы в $\mathcal{D}(K)$ – это

$$\|\varphi\|_{m,K} = max_{|\alpha| \le m; x} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{12}$$

Наконец, *пространство* $\mathcal{D}'(K)$ состоит из линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{D}(K)$.

Всеми этими пространствами пользовался Лоран Шварц. Есть много других полезных пространств обобщенных функций, они обычно придумываются под рассматриваемые задачи.

Обратим внимание на то, что все вложения в (7) являются *непрерывными*: сходимость последовательности сохраняется при переходе в более широкое пространство. Кроме того, пространство $\mathcal{D}$ *плотно* в $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$. Действительно, если $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{S}$ или $\mathcal{E}$, а $\varphi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности начала, то $\varphi(x/j)\psi(x) \to \psi(x)$ соответственно в $\mathcal{S}$ или $\mathcal{E}$. Проверьте это. Проверьте также полноту пространств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$.