ЛЕКЦИЯ 4.

12. Счетно-нормированные пространства. Пространства $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(K)$ являются счетно-нормированными. Приведем общее определение счетно-нормированного пространства. Рассматривается линейное пространство X элементов $x, y, \ldots$. На нем введена счетная последовательность полунорм $p_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ (или норм). *Полунорма* $p(x)$ – это неотрицательная функция со свойствами

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)|. \tag{1}$$

Кроме того, потребуем, чтобы из равенств $p_m(x) = 0$ при всех m следовало, что $x = 0$. Сходимость $x_j \to x$ в этом пространстве определяется так:

$$p_m(x_j - x) \to 0 \quad \text{при всех } m.$$

Не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность полунорм монотонна: $p_m(x) \le p_{m+1}(x)$ при всех x из m. (Действительно, p_m можно заменить на $p_1 + \cdots + p_m$ при всех m.) Будем считать, что это условие выполнено.

Счетно-нормированное пространство можно превратить в *топологическое пространство*, определив окрестности точек следующим образом:

$$O_{m,\varepsilon}(x) = \{y : p_m(x-y) < \varepsilon\} \tag{2}$$

($\varepsilon > 0$). Это пространство *хаусдорфово*: любые две точки имеют непересекающиеся окрестности. Действительно, если $p_m(x-y) = \delta > 0$ при каком-нибудь m, то достаточно взять $O_{m,\delta/2}(x)$ и $O_{m,\delta/2}(y)$.

Далее, это пространство *метризуемо*: метрику (расстояние) вводим формулой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}. \tag{3}$$

Аксиомы метрики легко проверяются: эта функция неотрицательна, равна нулю тогда и только тогда, когда $x = y$, симметрична, т.е. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, и удовлетворяет неравенству треугольника (последнее проверьте сами). *Метрика инвариантна относительно сдвигов*: $\rho(x-y) = \rho(x-z, y-z)$. Сходимость $x_j \to x$, определенная выше, равносильна сходимости в этом метрическом пространстве. Действительно, справедливо неравенство

$$\rho(x,y) \le p_m(x-y) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < p_m(x-y) + \frac{1}{2^m}; \tag{4}$$

из него легко следует, что из сходимости по полунормам следует сходимость по метрике. Обратное утверждение следует из неравенства

$$\frac{p_m(x-y)}{1 + p_m(x-y)} \le 2^m \rho(x,y) \tag{5}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

при любом m. Действительно, из него вытекает, что

$$\text{если} \quad 2^m\rho(x,y) < \varepsilon < 1/2, \quad \text{то} \quad p_m(x-y) \le \varepsilon/(1-\varepsilon) < 2\varepsilon. \tag{6}$$

Пусть теперь $f(x)$ – функционал (числовая функция) на счетно-нормированном пространстве X. Его непрерывность в точке y можно определить двумя способами. 1) По $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ при $\rho(x,y) < \delta$. 2) $f(x_j) \to f(y)$ для любой последовательности x_j, сходящейся к y. Эквивалентность этих определений проверяется в точности так же, как в обычном курсе анализа. Это общий факт для функционалов на метрических пространствах. Функционал называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке. Если функционал линеен, то поскольку расстояние инвариантно относительно сдвигов, непрерывность следует из непрерывности в одной точке, например, в нуле.

Следующая теорема будет для нас очень полезна.

Теорема 1. *Непрерывность линейного функционала $f(x)$ равносильна его ограниченности по какой-нибудь из полунорм: найдутся такие m и $C > 0$, что*

$$|f(x)| \le Cp_m(x). \tag{7}$$

Доказательство основано на неравенстве (4) и утверждении (6). Пусть выполнено условие (7); проверим, что наш функционал стремится к 0 при $\rho(x,0) \to 0$. Зададим $\varepsilon > 0$ и предположим, что $2^m\rho(x,0) \le \delta < 1/2$. Тогда в силу (6) $p_m(x) < 2\delta$. Поэтому если дополнительно $2C\delta < \varepsilon$, то из (7) следует, что $|f(x)| < \varepsilon$.

Пусть теперь функционал $f(x)$ стремится к 0 при $\rho(x,0) \to 0$. Тогда, в частности, по $\varepsilon = 1$ найдется такое $\delta > 0$, что из $\rho(x,0) < \delta$ следует $|f(x)| \le 1$. Согласно (4) имеем при любом m

$$\rho(x,0) < p_m(x) + \frac{1}{2^m}.$$

Выберем m так, что $1/(2^m) < \delta/2$. Тогда из $p_m(x) < \delta/2$ следует $|f(x)| < 1$. Теперь от противного проверяется, что если $p_m(x) > 0$, то

$$|f(x)| \le \frac{2}{\delta}\, p_m(x),$$

так как f и p_m при замене x на λx умножаются на $|\lambda|$. Если же $p_m(x) = 0$, то из аналогичных соображений получается, что $f(x) = 0$. Таким образом, неравенство (7) получается с постоянной $C = 2/\delta$. $\square$

Теорема 2. *Пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}$ совпадает с пространством обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ с компактными носителями.*

Доказательство. Пусть f – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{E}$. Тогда в силу теоремы 1

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le m, |x|\le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

где m и C не зависят от φ. Отсюда следует, что $\langle f, \varphi \rangle = 0$, если носитель функции φ не имеет общих точек, скажем, с шаром радиуса $m+1$ с центром в начале. Значит, f имеет компактный носитель. Конечно, этот носитель может быть частью последнего шара.

Обратно, пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{D}'$ с компактным носителем и ψ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности этого компакта. Тогда

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle$$

на функциях $\varphi \in \mathcal{D}$. Но по этой формуле f продолжается до линейного непрерывного функционала на $\mathcal{E}$. Именно в смысле возможности продолжения и надо понимать соответствующую часть утверждения теоремы. □

13. Первая встреча с соболевским пространством $H^m(\Omega)$. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, например, все $\mathbb{R}^n$, и m – целое неотрицательное число. Рассмотрим линеал в $C^m(\Omega)$, состоящий из функций, для которых конечна норма, определяемая равенством

$$\|u\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \tag{8}$$

Это линейное пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} \int \partial^\alpha u(x)\, \overline{\partial^\alpha v(x)}\, dx. \tag{9}$$

Оно неполно. Его пополнение по норме (8) называется *соболевским пространством* $H^m(\Omega)$. Другое обозначение: $W_2^m(\Omega)$. При $m = 0$ это обычное $L_2(\Omega)$.

Мы откладываем на будущее подробное рассмотрение этого и более общих соболевских пространств. Пока они нам нужны только для того, чтобы доказать теорему 2 из п. 8 об общем виде обобщенной функции с компактным носителем (доказательство будет проведено в п. 14).

Отметим следующее. Если при пополнении появляется элемент u как предел обычных гладких функций $u_k(x)$ по норме, определенной в (8), то это, конечно, функция из $L_2(\Omega)$: $u = u(x)$. Производные $\partial^\alpha u_k(x)$ порядков $|\alpha| \le m$ тоже имеют пределы в $L_2(\Omega)$, мы их обозначим через $\partial^\alpha u(x)$ и назовем *обобщенными производными* функции $u(x)$ порядка α в смысле С.Л. Соболева. В дальнейшем мы увидим, что это производные в смысле обобщенных функций! Норма в (8) и скалярное произведение (9) сохраняют смысл для всех элементов пространства $H^m(\Omega)$. Это, следовательно, гильбертово пространство.

Если H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle u, v \rangle$, то согласно теореме Ф. Рисса общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над H выражается формулой $f(u) = (u, w)$, где w – фиксированный элемент из H. Отсюда следует, что *общий вид линейного непрерывного функционала $f(u)$ над пространством $H^m(\Omega)$ выражается формулой*

$$f(u) = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) w_\alpha(x)\, dx, \tag{10}$$

где $w_\alpha(x)$ – некоторые фиксированные функции из $L_2(\Omega)$.

Будем для простоты считать, что область Ω или совпадает с $\mathbb{R}^n$, или совпадает с полупространством, или ограничена и имеет гладкую (класса C^∞) границу.

Позднее будет доказана *теорема вложения*, принадлежащая С.Л. Соболеву:

Теорема. *При $m > n/2$ пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C^0(\overline{\Omega})$ в следующем смысле: каждый элемент $u(x)$ пространства $H^m(\Omega)$ – непрерывная функция (быть может, после исправления на множестве нулевой меры), удовлетворяющая неравенству*

$$|u(x)| \le C\|u\|_{m,\Omega}, \tag{11}$$

где постоянная C зависит только от области Ω. Если $m > N + n/2$, где N – натуральное число, то в аналогичном смысле пространство $H^m(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $C^N(\overline{\Omega})$, при этом справедливо неравенство

$$|\partial^\alpha u(x)| \le C_N\|u\|_{m,\Omega} \quad (|\alpha| \le N). \tag{12}$$

14. Структура обобщенных функций с компактными носителями. Сначала мы выясним структуру обобщенных функций из $\mathcal{D}(K)$, где

$$K = K_a = \{x : |x_j| \le a,\ \ j = 1, \dots, n\}, \tag{13}$$

a – положительное число. Будем называть это множество кубом. Можно рассмотреть и значительно более общие компакты.

В пространстве D_K у нас введена система норм

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha|\le m; x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{14}$$

Введем вторую систему – соболевских норм

$$\|\varphi\|'_m = \left[\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega |\partial^\alpha \varphi(x)|^2 dx\right]^{1/2}, \tag{15}$$

где m также пробегает все целые неотрицательные числа, а Ω –внутренность куба K.

Эти две системы *эквивалентны* в следующем смысле: для каждого m найдутся такие m' и C_m, что $\|\varphi\|_m \le C_m\|\varphi\|'_{m'}$, и наоборот. Действительно, очевидно, что

$$\|\varphi\|'_m \le C'_m\|\varphi\|_m,$$

где C'_m легко выражается через объем куба K и m. В обратную сторону утверждение следует из приведенной выше теоремы вложения.

Поэтому сходимость в $\mathcal{D}(K)$ можно определять при помощи соболевских норм (15). Пусть $f(\varphi)$ – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(K)$. Согласно теореме 1 в п. 12 он ограничен по некоторой соболевской норме:

$$|f(\varphi)| \le C\|\varphi\|'_m. \tag{16}$$

Тогда он непрерывно продолжается (с сохранением этого неравенства) на замыкание линеала $\mathcal{D}(K)$ в $H^m(\Omega)$. Это не все соболевское пространство $H^m(\Omega)$ (увидим это позже), а некоторое (замкнутое) подпространство в нем. Но по теореме Хана–Банаха наш функционал продолжается теперь до линейного непрерывного функционала на всем пространстве $H^m(\Omega)$.

Выше мы отметили, как выглядит такой функционал. Существуют такие функции $w_\alpha(x) \in L_2(\Omega)$, что

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega w_\alpha(x)\varphi(x)\,dx \tag{17}$$

Этим мы показали, что *каждая обобщенная функция из* $\mathcal{D}(K)$ *– это конечная сумма производных в смысле обобщенных функций от функций, принадлежащих* $L_2(\Omega)$.

Этот результат мы упростим при помощи интегрирования по частям.

Так как функции $w_\alpha(x)$ принадлежат $L_2(\Omega)$, то они суммируемы – принадлежат $L_1(\Omega)$.

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ – суммируемые функции одного переменного на отрезке $[c,d]$. Положим

$$G(t) = \int_c^t g(\tau)\,d\tau, \quad H(t) = \int_c^t h(\tau)\,d\tau \quad (c \le t \le d). \tag{18}$$

Известно, что это абсолютно непрерывные функции и что почти всюду $G'(t) = g(t)$, $H'(t) = h(t)$. При этом справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_c^d G(t)h(t)\,dt - \int_c^d g(t)H(t)\,dt = G(d)H(d) - G(c)H(c). \tag{19}$$

См., например, С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, 1949, стр. 159.

Это позволяет преобразовать интегралы

$$\int_\Omega w_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx$$

следующим образом. Считая, что этот интеграл записан в виде повторных интегралов по $x_1,\dots,x_{n-1}$ от интеграла по x_n, преобразуем последний интегрированием по частям: при почти всех $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ функцию $w_\alpha(x',x_n)$ заменим ее интегралом по последнему переменному от $-a$ до x_n, а функцию $\partial^\alpha\varphi(x',x_n)$ продифференцируем по этому переменному. Затем, пользуясь теоремой Фубини, поменяем местами интегралы по двум последним переменным

и повторим операцию уже по переменному x_{n-1}. И т.д. В результате функция $w_\alpha(x)$ заменится непрерывной функцией, а порядок дифференцирования функции φ повысится на единицу по каждому переменному.

Затем можно выровнять все порядки дифференцирования – заменить их наибольшими.

Мы получили следующий результат. *Любая обобщенная функция из $\mathcal{D}'(K)$ является функционалом типа производной некоторого порядка от функции, непрерывной в K.* Очевидно, что и наоборот, такой функционал является обобщенной функцией из $\mathcal{D}(K)$. Значит, мы полностью описали $\mathcal{D}(K)$.

Теперь рассмотрим обобщенную функцию f из $\mathcal{E}$. Мы уже знаем, что она имеет компактный носитель. Пусть $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 в окрестности этого носителя. Тогда $f = \psi f$. Пусть a настолько велико, что носитель функции ψ содержится в K_a. Тогда достаточно выяснить, как f действует на основные функции из $\mathcal{D}(K)$. Но это мы уже знаем: как производная некоторого порядка α в смысле обобщенных функций от некоторой непрерывной функции $g(x)$ на K.

Таким образом,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_K g(x) \partial^\alpha [\psi(x)\varphi(x)]\, dx. \tag{20}$$

Здесь мы можем произвольно продолжить функцию $g(x)$ вне K_a. Продолжим ее так, чтобы получилась функция, непрерывная на $\mathbb{R}^n$ и равная 0 вне $K_{a+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Наконец, вычислим производную $\partial^\alpha[\psi\varphi]$ по формуле Лейбница. Получим

$$\langle f, \varphi \rangle = \int \sum f_\alpha(x) \partial^\beta \varphi(x)\, dx, \tag{21}$$

где сумма конечна и $f_\alpha(x)$ – финитные непрерывные функции.

Обратно, каждый такой функционал на $\mathcal{D}$ является обобщенной функцией с компактным носителем. Теорема 2 из п. 8 доказана.