ЛЕКЦИЯ 5.

15. Структура обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Здесь мы докажем теорему 1 из п. 8.

Пусть f – обобщенная функция из $\mathcal{D}$, сосредоточенная в нуле. В силу теоремы 1 из п. 12, найдутся такие C, m и h, что

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C \max_{|\alpha|\le m, |x|\le h} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{1}$$

Сопоставим функции φ набор значений ее производных в нуле до порядка m; он называется *струей порядка* m этой функции в нуле:

$$j_m(\varphi, 0) = \{\partial^\alpha \varphi(0) : |\alpha| \le m\} \tag{2}$$

(jet=струя). Покажем, что

$$j_m(\varphi, 0) = 0 \Rightarrow \langle f, \varphi\rangle = 0. \tag{3}$$

Отсюда будет следовать, что $\langle f, \varphi\rangle$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал на конечномерном линейном пространстве струй (2), а такой функционал, как известно, имеет вид конечной линейной комбинации $\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0)$. Итак, пусть $j_m(\varphi, 0) = 0$.

Пусть $\psi(x)$ – функция из $\mathcal{D}$, равная 1 при $|x| \le 1/2$ и 0 при $|x| \ge 1$. Положим $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x/\varepsilon)$. Так как f сосредоточена в нуле, то

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \psi_\varepsilon \varphi\rangle \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Теперь достаточно показать, что здесь правая часть стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. В силу (1) для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что при $|\alpha| \le m$

$$\max_x |\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x)\varphi(x)]| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \tag{5}$$

По формуле Лейбница

$$\partial^\alpha [\psi_\varepsilon(x)\varphi(x)] = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_{\beta,\gamma} \partial^\beta \psi_\varepsilon(x) \cdot \partial^\gamma \varphi(x). \tag{6}$$

Здесь

$$\partial^\beta \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-|\beta|} (\partial^\beta \psi)(x/\varepsilon),$$
$$\partial^\gamma \varphi(x) = O(\varepsilon^{m+1-|\gamma|}) \text{ на } \operatorname{supp} \psi_\varepsilon.$$

Поэтому выражение (6) есть $O(\varepsilon^{m+1-|\alpha|})$ равномерно по x, так что оно стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

16. Структура обобщенных функций из $\mathcal{S}'$. Здесь мы докажем теорему из п. 12. Можно было бы ввести для этого соболевские пространства с весом, но это накладно; вместо этого мы воспользуемся теоремой об общем виде линейного непрерывного функционала на пространстве L_1 с весом. Этим же путем можно было бы доказывать утверждение о структуре обобщенной функции из $\mathcal{D}(K_a)$ – рассматривать линейные непрерывные функционалы на пространстве $L_1(K_a)$ без веса.

Удобно перейти в $\mathcal{E}$ сначала к системе норм

$$p_m(\varphi) = max_{|\alpha|\le m;x}[(1+|x|)^m|\partial^\alpha\varphi(x)|. \tag{7}$$

Эта система норм эквивалентна следующей:

$$p'_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\le m}\int(1+|x|)^m|\partial^\alpha\varphi(x)|\,dx.$$

Действительно, так как $(1+|x|)^m = (1+|x|)^{m+n+1}(1+|x|)^{-n-1}$ и функция $(1+|x|)^{-n-1}$ суммируема, то

$$p'_m(\varphi) \le C_m p_{m+n+1}(\varphi).$$

С другой стороны, если конечны все интегральные нормы $p'_m(\varphi)$, то $(1+|x|)^m\partial^\alpha(x)$ в любой точке можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\partial^{(1,\ldots,1)}[(1+|x|)^m\partial^\alpha\varphi(y)]\,dy.$$

Это позволяет оценить каждую норму $p_m(\varphi)$ через интегральные нормы подходящего большего порядка.

Пусть теперь $f\in\mathcal{S}'$. Согласно теореме 1 из п. 12 найдутся такие C и m, что

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le Cp'_m(\varphi). \tag{8}$$

Теперь сопоставим функции φ вектор-функцию $\{\partial^\alpha\varphi(x)\}$, где $|\alpha|\le m$. Эта вектор-функция лежит в векторном пространстве $L_1(\mathbb{R}^n,(1+|x|)^m)$ с весом $(1+|x|)^m$. Если вес – единица, то, как известно, сопряженное пространство отождествляется с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ограниченных измеримых функций, причем любой непрерывный линейный функционал над $L_1(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$f(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)\,dx,$$

где $g(x)$ – ограниченная измеримая функция. Аналогично обстоит дело в случае L_1 с весом – см. Данфорд и Шварц, Линейные операторы, т. 1, стр.314. Продолжив наш функционал до ограниченного линейного функционала на векторном весовом пространстве L_1, получаем, что он реализуется в виде

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int(1+|x|)^m g_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\,dx,$$

где $g_\alpha(x)$ – ограниченные измеримые функции. Очевидно, что

$$f_\alpha(x) = (1+|x|)^m g_\alpha(x)$$

– измеримые функции умеренного роста. Так как производные $\partial^\alpha \varphi(x)$ быстро убывают, то при помощи интегрирования по частям можно заменить функции $g_\alpha(x)$ непрерывными функциями, а затем выровнять порядки производных. Интегрировать функции $f_\alpha(x)$ по каждому переменному надо при этом от конечной точки, скажем, от нуля. Мы видим, что каждая обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ имеет структуру, указанную в формулировке теоремы. Обратно, функционал такой структуры всегда принадлежит к $\mathcal{S}'$. □

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ОБЫЧНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1. Преобразование Фурье на $\mathcal{S}$. Преобразование Фурье функции $u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$u(x) \mapsto v(\xi) = (Fu)(\xi) = \int e^{-ix\xi} u(x)\, dx. \tag{9}$$

Здесь и дальше $x \cdot \xi = \sum x_j \xi_j$; ξ_j пока вещественны. Так как модуль экспоненты под знаком интеграла – единица, то очевидно, что $v(\xi)$ – ограниченная функция. (Можно показать, что она стремится к 0 на бесконечности.)

Мы сейчас будем рассматривать функции $u = \varphi \in \mathcal{S}$.

Положим

$$D_j = i^{-1}\partial_j = i^{-1}\partial/\partial x_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Интегрированием по частям легко проверяется формула

$$F[D_j \varphi] = \xi_j F[\varphi] \tag{10}$$

(именно по этой причине при использовании преобразования Фурье производные D_j удобнее, чем ∂_j). Отсюда следует, что

$$F[D^\alpha \varphi] = \xi^\alpha F[\varphi] \tag{11}$$

при любом α. Далее, рассмотрим линейный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha. \tag{12}$$

Из (11) следует, что

$$F[a(D)\varphi] = a(\xi) F[\varphi], \tag{13}$$

где функция

$$a(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{14}$$

называется (полным) *символом* оператора $a(D)$. Например, символ оператора Лапласа Δ (и главный символ, см. ниже) равен $-|\xi|^2$.

Отметим, что символ определяется и для операторов с переменными коэффициентами: если

$$a(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{15}$$

то (полным) *символом* этого оператора называется функция

$$a(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha. \tag{16}$$

Главный символ того же оператора – старшая однородная часть символа:

$$a_0(x,\xi)=\sum_{|\alpha|= m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \tag{17}$$

(вместо a_0 часто пишут a_m). Если главный символ не обращается в нуль при вещественных $\xi\ne 0$, то оператор называется *эллиптическим.*

Еще одна полезная формула получается из (9) дифференцированием по ξ_j под знаком интеграла:

$$D_jF[\varphi](\xi)=F[-x_j\varphi(x)]. \tag{18}$$

Из нее следует, что

$$D^\alpha F[\varphi](\xi)=F[(-1)^{|\alpha|}x^\alpha\varphi(x)]. \tag{19}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)\in\mathcal{S}$ и $\psi(\xi)=F[\varphi(x)]$. Тогда $\psi\in\mathcal{S}$.*

Действительно, из (11) видно, что все $\xi^\alpha\psi(\xi)$ – ограниченные функции, так что $\psi(\xi)$ быстро убывает. Далее, $\psi(\xi)$ непрерывна (это видно из определения преобразования Фурье) и имеет непрерывные производные любого порядка – см. (19), причем эти производные тоже быстро убывают. □

Обратное преобразование Фурье определяется на функциях из $L_1(\mathbb{R}^n)$ формулой

$$v(\xi)\mapsto u(x)=F^{-1}[v(\xi)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}v(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Теорема 2. *На функциях из $\mathcal{S}$ прямое и обратное преобразования Фурье взаимно обратны.*

Доказательство. Пусть для простоты $n=1$. Имеем, используя предельный переход под знаком интеграла и теорему Фубини,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\int\varphi(y)e^{-iy\xi}dyd\xi=\\ \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{ix\xi-\varepsilon|\xi|}\int\varphi(y)e^{-y\xi}dyd\xi=\\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int\varphi(y)\frac{1}{2\pi}\int e^{-i(y-x)\xi-\varepsilon|\xi|}d\xi dy.\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\int_0^\infty e^{-it\xi-\varepsilon\xi}d\xi = \frac{e^{-it\xi-\varepsilon\xi}}{-it-\varepsilon}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{it+\varepsilon},$$
$$\int_{-\infty}^0 e^{-it\xi+\varepsilon\xi}d\xi = \frac{e^{-it\xi+\varepsilon\xi}}{-it+\varepsilon}\Bigg|_{-\infty}^0 = \frac{1}{-it+\varepsilon}.$$

Сумма этих двух интегралов равна $2\varepsilon/(\varepsilon^2+t^2)$. Если ее разделить на 2π и проинтегрировать, получим 1. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\varepsilon}{(y-x)^2+\varepsilon^2}\,dy = \varphi(x). \tag{22}$$

Это проверяется очевидным образом: интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(y)-\varphi(x)|\frac{\varepsilon}{(y-x)^2+\varepsilon^2}\,dy$$

разбивается в сумму интегралов по $|y-x|<r$ и $|y-x|>r$ с малым фиксированным r, в первом мал модуль разности $|\varphi(y)-\varphi(x)|$, второй стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$.

[Отметим, что фактически мы здесь имеем свертку функции φ) с функциями, образующими дельтаобразное семейство:

$$\varphi(x) * \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x)$$

при $\varepsilon\to 0$. Но формально здесь затруднительно ссылаться на приготовленные раньше теоремы.]

То же самое получается, если написать преобразования в обратном порядке. На многомерный случай доказательство распространяется без труда. □

Более общая теорема обращения доказывается в курсе функционального анализа.

Замечание. Формулу (13) можно теперь переписать в виде

$$a(D) = F^{-1}a(\xi)F. \tag{23}$$

На операторы в частных производных с переменными коэффициентами эта формула обобщается так:

$$a(x,D) = F^{-1}_{\xi\mapsto x}a(x,\xi)F_{x\mapsto\xi}. \tag{24}$$

Позднее мы увидим, что псевдодифференциальный оператор в $\mathbb{R}^n$ с символом $a(x,\xi)$ определяется именно такой формулой. Но там символы уже не будут обязательно многочленами по ξ.

Теорема 3. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$.*

Доказательство. Уже показано, что

$$F[\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)] = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi).$$

Легко проследить, что каждая норма функции в последнем пространстве оценивается через некоторые нормы ее прообраза Фурье в предыдущем пространстве. И наоборот. □