ЛЕКЦИЯ 6.

Теорема 4. *Свертка двух функций из $\mathcal{S}$ принадлежит $\mathcal{S}$. При преобразовании Фурье она переходит в произведение образов Фурье этих функций:*

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi].$$

Доказательство. Первое утверждение мы могли доказать раньше. Очевидно, что свертка двух функций из $\mathcal{S}$

$$\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dy$$

допускает дифференцирование под знаком интеграла любое число раз. Если ее умножить на $|x|^N$, то этот множитель можно оценить под знаком интеграла через $(|x-y|+|y|)^N$. Отсюда видно, что свертка и все ее производные быстро убывают.

Второе утверждение проверяется при помощи теоремы Фубини:

$$\int e^{-ix\cdot\xi}\int \varphi(x-y)\psi(y)\,dydx = \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)\,dy\int e^{-i(x-y)\cdot\xi}\varphi(x-y)\,dx.$$

Остается заменить под знаком внутреннего интеграла $x-y$ на x. □

Отметим заодно следующее утверждение.

Теорема 5. *Свертка функции φ из $\mathcal{S}$ с непрерывной медленно растущей функцией $f(x)$ определена и является бесконечно гладкой медленно растущей функцией.*

Доказательство. Записав эту свертку в виде

$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)f(y)\,dy,$$

можем неограниченно дифференцировать ее под знаком интеграла. Получаются непрерывные функции. Функция $f(y)$ при больших $|y|$ мажорируется выражением $(|x-y|+|x|)^N$ при некотором N, и тогда свертка не может расти быстрее $|x|^N$ на бесконечности. □

2. Преобразование Фурье на пространстве $\mathcal{S}'$. Если $f(x)$ – функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$, то ее преобразование Фурье определяет непрерывный линейный функционал над $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\begin{aligned}\langle F[f](\xi),\psi(\xi)\rangle &= \iint e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx\,\psi(\xi)\,d\xi = \int f(x)\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi dx\\ &= \langle f(x), F[\psi](x)\rangle. \qquad (1)\end{aligned}$$

Здесь второе равенство вытекает из теоремы Фубини. К ψ применяется не обратное, а прямое преобразование Фурье. Принимая эту формулу за образец, *полагаем*

$$\langle F[f],\psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle \qquad (f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x),\ \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)). \qquad (2)$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Автоматически получается следующий важный результат.

Теорема 6. *Преобразование Фурье обобщенной функции из $\mathcal{S}'$ – обобщенная функция из $\mathcal{S}'$. Более того, отображение $f \mapsto F[f]$ – непрерывный в обе стороны изоморфизм пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$ на пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$.*

Обратное преобразование Фурье определяется для обобщенных функций, конечно, формулой

$$\langle F^{-1}[g], \varphi\rangle = \langle g, F^{-1}[\varphi]\rangle \qquad (g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)). \tag{3}$$

Пример 1. *Преобразование Фурье дельта-функции – единица.* Немного более общий результат:

$$F[\delta(x-y)] = e^{-iy\cdot\xi}. \tag{4}$$

Действительно,

$$\langle \delta(x-y), \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\rangle = \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi.$$

Пример 2. Справедлива формула

$$F[1] = (2\pi)^n\delta(\xi). \tag{5}$$

Действительно,

$$\langle F[1], \psi\rangle = \langle 1, F[\psi]\rangle = \int dx \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{iy\cdot\xi}\int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\Big|_{y=0},$$

что равно $(2\pi)^n\psi(0)$ в силу формулы обращения преобразования Фурье.

Задачи. 1. Найдите преобразование Фурье от экспоненты $e^{ih\cdot x}$ (h – вещественный вектор).

2. Найдите преобразование Фурье функции Хевисайда $\theta(x)$. Указание: используйте формулу

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\theta(x)e^{-\varepsilon x}.$$

Ответ: $-i/(\xi - i0)$.

Теорема 7. *Для обобщенных функций f из $\mathcal{S}'$*

$$F[D_j f] = \xi_j F[f]. \tag{6}$$

Действительно, пусть $\psi(\xi) \in \mathcal{S}$. Тогда

$$\langle F[D_j f], \psi\rangle = \langle D_j f, F[\psi]\rangle = -\langle f, D_j \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,d\xi\rangle =$$

$$\langle f, \int e^{-ix\cdot\xi}\xi_j\psi(\xi)\,d\xi\rangle = \langle f, F[\xi_j\psi(\xi)]\rangle =$$

$$\langle F[f], \xi_j\psi(\xi)\rangle = \langle \xi_j F[f], \psi\rangle.$$

Следствие. *Если $a(D)$ – оператор в частных производных с постоянными коэффициентами, то для обобщенных функций f из $\mathcal{S}'$*

$$a(D)f = F^{-1}a(\xi)Ff. \tag{7}$$

3. Преобразования Фурье обобщенных функций с компактными носителями.

Если $f(x)$ – непрерывная или хотя бы суммируемая функция с компактным носителем, то ее обычное преобразование Фурье можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, так что это бесконечно гладкая ограниченная функция. Более того, оно аналитически продолжается до целой аналитической функции

$$g(\zeta) = \int e^{-ix\zeta} f(x)\,dx, \quad \zeta = \xi + i\tau.$$

Можно также отметить, что его можно рассматривать как результат действия функции $f(x)$ на экспоненту $e^{-ix\cdot\xi}$ как функцию из $\mathcal{E}$, зависящую от ξ как от параметра:

$$\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx = \langle f(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle. \tag{8}$$

Эти наблюдения легко обобщаются на обобщенные функции с компактными носителями:

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{E}'$. Тогда $F[f]$ – медленно растущая бесконечно гладкая функция, допускающая продолжение до целой аналитической функции. При этом справедлива формула*

$$F[f] = \langle f, e^{-ix\cdot\xi}\rangle. \tag{9}$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай $f = D^\alpha f_\alpha(x)$, где $f_\alpha(x)$ – финитная непрерывная функция. В силу теоремы 7 из предыдущего пункта в этом случае

$$F[f] = \xi^\alpha F[f_\alpha(x)] = \xi^\alpha \int e^{-ix\cdot\xi} f_\alpha(x)\,dx$$

– медленно растущая бесконечно гладкая функция, и она продолжается до целой аналитической функции. Ее можно записать в виде

$$F[f] = \langle f_\alpha(x), \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle = \langle f_\alpha(x), (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\rangle\langle D^\alpha f_\alpha(x), e^{-ix\cdot\xi}\rangle.$$

чем и заканчивается доказательство. □

4. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций.

Теорема 1. *Пусть f и g – обобщенные функции соответственно из $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{E}'$.* Тогда свертка $f * g$ принадлежит $\mathcal{S}'$ и

$$F[f * g] = F[f]F[g]. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $g = \partial^\alpha g_\alpha(x)$, где $g_\alpha(x)$ – финитная непрерывная функция.

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Имеем

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(x), \langle \partial^\alpha g_\alpha(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f(x), \int g_\alpha(y)\partial^\alpha\varphi(x+y)\,dy\rangle.$$

Здесь интеграл по y можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и получающиеся интегралы быстро убывают (умножив такой интеграл на $|x|^N$, можно оценить этот множитель под знаком интеграла через $(|x+y|+|y|)^N$). Значит, f действует на основную функцию из $\mathcal{S}$, так что $f*g$ – линейный непрерывный функционал над $\mathcal{S}$.

Далее,

$$\langle F[f*g], \psi\rangle = \langle f*g, F[\psi]\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \int \psi(\xi)e^{-i(x+y)\cdot\xi}d\xi\rangle\rangle. \tag{11}$$

Здесь выражение во внутренних угловых скобках равно

$$\int g_\alpha(y)(-1)^\alpha D_y^\alpha \int \psi(\xi)e^{-i(x+y)\cdot\xi}d\xi dy = \int\Big[\int g_\alpha(y)e^{-iy\cdot\xi}\,dy\Big]\xi^\alpha\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi = \int F[g_\alpha](\xi)\xi^\alpha\psi(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi = F[F[g](\xi)\psi(\xi)].$$

Поэтому выражение (11) можно переписать в виде

$$\langle f, F[F[g](\xi)\psi(\xi)]\rangle = \langle F[f], F[g]\psi\rangle = \langle F[f]F[g], \psi\rangle,$$

что и доказывает наше утверждение. □

5. Преобразование Фурье на $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Пусть φ – функция из $\mathcal{D}$. Ее преобразование Фурье

$$\psi(\xi) = \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \tag{12}$$

продолжается до целой аналитической функции

$$\psi(\zeta) = \int \varphi(x)e^{-ix\cdot\zeta}dx. \tag{13}$$

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – вектор из положительных чисел, положим

$$K_a = \{x : |x_j| \le a_j,\ j = 1, \ldots, n\} \tag{14}$$

и будем называть это множество брусом (раньше мы рассматривали куб с одинаковыми a_j). Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(K_a)$, т.е. это основная функция с носителем в K_a. Тогда при всех натуральных N справедливы оценки

$$|\zeta|^N|\psi(\zeta)| \le C_N e^{\sum_1^n a_j|\tau_j|}. \tag{15}$$

(Действительно, умножение интеграла (13) на ζ_j равносильно его дифференцированию по x_j, а производная перебрасывается с экспоненты на $\varphi(x)$ интегрированием по частям.) В частности, функция $\psi(\zeta)$ быстро убывает при $|\tau_j| \le \text{const}$, $\xi \to \infty$ и является целой функцией экспоненциального типа. (Целая аналитическая функция $F(z)$ называется функцией экспоненциального типа, если справедливо неравенство $|F(x)| \le c_1 e^{c_2|z|}$.)

Введем *пространство* $\mathcal{Z}_a$, оно будет состоять из целых аналитических функций $\psi(\zeta)$ с оценками (15).

Теорема 1. *Обратное преобразование Фурье функции $\psi \in Z_a$ принадлежит $\mathcal{D}(K_a)$.*

Доказательство. Для простоты пусть $n = 1$. Запишем формулу Коши для $\psi(\xi)$:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(z)}{z - \xi}\, dz,$$

где контур C охватывает точку ξ. Будем считать, что это окружность радиуса 1. Этот интеграл можно неограниченно дифференцировать под знаком интеграла, и легко проверить, что все производные быстро убывают (если написать $|\xi|^N$ перед продифференцированным любое число раз интегралом, то этот множитель можно оценить через $(|\xi - z| + |z|)^N$ под знаком интеграла.) Поэтому $\psi \in \mathcal{S}$ и, значит, прообраз Фурье этой функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi) e^{ix\xi} d\xi \tag{16}$$

принадлежит $\mathcal{S}$. Осталось показать, что функция $\varphi(x)$ равна 0 нулю вне K_a. Это делается подходящим сдвигом линии интегрирования в (16), возможным в силу оценок (15). Например, пусть $x > a$. Тогда переписываем (16) в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(\xi + i\tau) e^{ix(\xi + i\tau)} d\xi.$$

При положительном τ подинтегральное выражение не превосходит по модулю

$$C(1 + |\xi|)^{-2} e^{(a-x)\tau},$$

так что интеграл стремится к нулю при $\tau \to +\infty$. Поэтому $\varphi(x) = 0$.

Обобщение на многомерный случай получается без труда. □

Замечание. По существу мы доказали вариант теоремы Пэли–Винера, в которой описаны преобразования Фурье функции из $L_2(\mathbb{R})$, равной 0 вне отрезка. (Оно принадлежит L_2 и продолжается до целой функции экспоненциального типа.) Другой вариант можно было бы добавить к п. 3. Преобразование Фурье обобщенной функций с носителем, лежащим в K_a, – это целая функция $g(\zeta)$ с оценкой вида

$$|g(\zeta)| \le C(1 + |\zeta|)^N e^{\sum_1^n a_j |\tau_j|} \tag{17}$$

с фиксированным N.

В пространстве $\mathcal{Z}_a$ назовем последовательность функций $\{\psi_n\}$ *сходящейся*, если их прообразы Фурье образуют сходящуюся последовательность в $\mathcal{D}(K_a)$. Теперь преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}(K_a)$ и $\mathcal{Z}_a$.