ЛЕКЦИЯ 7.

Наконец, введем *пространство* $\mathcal{Z}$ – объединение пространств $\mathcal{Z}_a$ по всем a. Это пространство преобразований Фурье всех функций из $\mathcal{D}$. Последовательность функций $\{\psi_j\}$ в $\mathcal{Z}$ назовем *сходящейся*, если она принадлежит $\mathcal{Z}_a$ при некотором a и там сходится. Получаем:

Теорема 2. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}$ и $\mathcal{Z}$.*

Теперь введем *пространство* $\mathcal{Z}'$ линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{Z}$ и определим *преобразование Фурье обобщенной функции f из $\mathcal{D}'$* формулой

$$\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle \quad (\psi \in \mathcal{Z}), \tag{1}$$

аналогичной формуле для преобразования Фурье обобщенной функции из $\mathcal{S}'$. Сразу получается

Теорема 3. *Преобразование Фурье устанавливает непрерывный в обе стороны изоморфизм между $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{Z}'$.*

Эти определения и теоремы принадлежат И.М. Гельфанду и Г.Е. Шилову. Лоран Шварц рассматривал преобразования Фурье на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Задачи. Перенесите на обобщенные функции f из $\mathcal{D}'$ формулу для $F[D_j f]$, формулу для $a(D)f$ и теорему о преобразовании Фурье свертки с обобщенной функцией из $\mathcal{E}'$ из лекции 6.

Следует отметить, что функционалы из $\mathcal{Z}'$ могут определяться интегралами по контурам в комплексной плоскости. Гельфанд и Шилов назвали такие функционалы *аналитическими*. Например, дельта-функция оказывается аналитическим функционалом:

$$\langle \delta(\zeta - \zeta_0), \psi(\zeta)\rangle = \psi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\, d\zeta, \tag{2}$$

где контур охватывает точку ζ_0.

Умножение на функцию $h(\zeta)$ определено в $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$, если это целая аналитическая функция, удовлетворяющая неравенствам вида (17) из лекции 6. Запишите определение умножения в $\mathcal{Z}'$.

Пусть для простоты $n = 1$. Заметим, что *для функции $\psi(\zeta)$ из $\mathcal{Z}$ тейлоровское разложение*

$$\psi(\zeta - z) = \sum_0^\infty \psi^{(k)}(\zeta)\frac{(-1)^k z^k}{k!} \tag{3}$$

справедливо в смысле сходимости в этом пространстве. Это следует из того, что двойственное разложение в $\mathcal{D}$

$$\sum_0^\infty (ix)^k \frac{z^k}{k!}\varphi(x) = e^{ixz}\varphi(x)$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

сходится в $\mathcal{D}$ (так как тейлоровский ряд для экспоненты сходится равномерно на любом компакте и то же верно после почленного дифференцирования).

Отсюда мы сейчас выведем, что *обобщенные функции из $\mathcal{Z}'$ не только бесконечно дифференцируемы, но и аналитичны – разложимы в ряды Тейлора.* Это означает следующее. Определим *сдвиг* $g(\zeta + z)$ обобщенной функции $g = g(\zeta)$ формулой

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta)\rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z)\rangle. \tag{4}$$

(Такое определение полезно и в применении к обобщенным функциям из $\mathcal{S}'$ или $\mathcal{D}'$, напишите его.) *Утверждается, что*

$$g(\zeta + z) = \sum_0^\infty g^{(k)}(\zeta)\frac{z^k}{k!} \tag{5}$$

в смысле сходимости в $\mathcal{Z}'$. Действительно,

$$\langle g(\zeta + z), \psi(\zeta)\rangle = \langle g(\zeta), \psi(\zeta - z)\rangle = \sum_0^\infty \langle g(\zeta), \frac{(-1)^k z^k}{k!}\psi^{(k)}(\zeta)\rangle,$$

так как ряд Тейлора функции $\psi \in \mathcal{Z}$, как отмечено выше, сходится к ней в $\mathcal{Z}$. Отсюда получаем (5) в $\mathcal{Z}'$.

Эти замечания легко обобщаются на многомерный случай.

III. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Фундаментальные решения уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим общее уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$a(D)u(x) = 0. \tag{6}$$

Его *фундаментальным решением* мы назвали такую обобщенную функцию $\mathcal{E}$, что

$$a(D)\mathcal{E} = \delta(x). \tag{7}$$

Оно определено с точностью до прибавления любого решения однородного уравнения (6).

Теорема 1. *Фундаментальное решение существует для любого $a(D)$. Более того, существует фундаментальное решение, принадлежащее $\mathcal{S}'$.*

Первое утверждение доказали Мальгранж и независимо Эренпрайс (1953-4). Хёрмандер (не опубликовано) и Трев (1956) дали конструктивное доказательство. (Позднее мы его разберем.) Более трудное второе утверждение доказали Лояшевич и независимо Хёрмандер (1958). (B. Malgrange, L. Ehrenpreis, L. Hörmander, F. Treves, S. Lojasiewicz.)

Теперь приведем простые, но важные утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение уравнения* (6)*, и пусть f – обобщенная функция с компактным носителем. Тогда свертка*

$$u = \mathcal{E} * f \tag{8}$$

является частным решением неоднородного уравнения

$$a(D)u = f. \tag{9}$$

Действительно,

$$a(D)[\mathcal{E} * f] = [a(D)\mathcal{E}] * f = \delta(x) * f = f.$$

Здесь, однако, надо пояснить следующее. Перебрасывание производных с одного сомножителя в свертке на другой отмечено у нас в случае, когда они оба – обобщенные функции с компактным носителем. Однако если только один из них имеет компактный носитель, то можно использовать следующий стандартный прием. Рассмотрим свертку на основных функциях с носителями в фиксированной ограниченной области. Тогда сомножитель с некомпактным носителем можно, не меняя свертки, умножить на финитную бесконечно гладкую функцию, равную 1 в шаре достаточно большого радиуса. Поэтому последняя выкладка корректна. □

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ – решение уравнения* (9) *из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение уравнения* (6)*. Тогда u выражается формулой* (8)*.*

Действительно,

$$u = \delta(x) * u = a(D)\mathcal{E} * u = \mathcal{E} * a(D)u = \mathcal{E} * f.$$

Теорема 4. *Фундаментальное решение уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0 \tag{10}$$

в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}} \quad при \quad n > 2, \qquad \mathcal{E}_2(x) = c_2 \log |x|, \tag{11}$$

где c_n – некоторые постоянные.

Доказательство и вычисление постоянных c_n немного отложим. Обратим внимание на то, что это локально интегрируемые функции, бесконечно гладкие вне начала координат. При всех n сингулярный носитель – начало координат.

Задача. Постройте фундаментальное решение для $n = 1$, т.е. для уравнения $u'' = 0$. См. лекцию 3.

Мы продолжим изучение и использование фундаментальных решений в дальнейших пунктах. До этого в п. 2 устраним небольшие недоработки, оставшиеся у нас при изучении свертки.

2. Еще две теоремы о свертке.

Теорема 1. *Свертка $h_1 * h_2$ – бесконечно гладкая функция, если либо $h_1 \in \mathcal{D}'$, $h_2 \in \mathcal{D}$, либо $h_1 \in \mathcal{E}$, $h_2 \in \mathcal{E}'$.*

Доказательство. Запишем определение свертки

$$\langle (h_1 * h_2), \varphi \rangle = \langle h_1(x), \langle h_2(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Докажем первое утверждение. Снова фиксируя ограниченную область, в которой находится носитель функции φ, можем предположить, что h_1 имеет компактный носитель. Тогда достаточно рассмотреть случай, в котором $h_1 = \partial^\alpha \widetilde{h}_1(x)$, где $\widetilde{h}_1(x)$ – финитная непрерывная функция. В этом случае

$$h_1 * h_2 = \partial^\alpha \int h_1(y) h_2(x-y)\, dy$$

– производная в смысле обобщенных функций. Но легко видеть, что интеграл – бесконечно гладкая финитная функция. Поэтому производную можно рассматривать в обычном смысле.

Второе утверждение проверяется аналогично; убедитесь в этом самостоятельно. □

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g, \tag{12}$$

$$\operatorname{sing\,supp}(f * g) \subset \operatorname{sing\,supp} f + \operatorname{sing\,supp} g. \tag{13}$$

Доказательство. Обе формулы следуют из определения свертки

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

Проверим первую. Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Пусть бесконечно гладкие функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ равны 1 в $\varepsilon/4$-окрестностях носителей обобщенных функций f и g соответственно и нулю вне $\varepsilon/2$-окрестностей. Тогда в написанной формуле можно заменить f на $\psi_1(x)f$ и g на $\psi_2(y)g$. Эти множители можно перенести к $\varphi(x+y)$. Если теперь φ равна нулю в ε-окрестности суммы $\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, то $\psi_1(x)\psi_2(y)\varphi(x+y) = 0$.

Проверим вторую. Для любого $\varepsilon > 0$ сделаем такое разбиение:

$$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2,$$

где f_1 и g_1 равны нулю вне $\varepsilon/2$-окрестностей сингулярных носителей обобщенных функций f и g, а вторые слагаемые – бесконечно гладкие функции, причем g_2 имеет компактный носитель. Имеем

$$f * g = f_1 * g_1 + f_2 * g_1 + f_1 * g_2 + f_2 * g_2.$$

Здесь носитель свертки $f_1 * g_1$ находится в ε-окрестности суммы сингулярных носителей обобщенных функций f и g. Остальные слагаемые – бесконечно гладкие в силу теоремы 1. □

3. Гипоэллиптические операторы. Очевидно, что если u – обобщенная функция, то

$$\operatorname{supp} a(D)u \subset \operatorname{supp} u \quad \text{и} \quad \operatorname{sing\,supp} a(D)u \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{15}$$

Оператор $a(D)$ называется *гипоэллиптическим*, если всегда

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} a(D)u, \tag{16}$$

иначе говоря, если решение уравнения $a(D)u = f$ всегда является бесконечно гладким в области, в которой f – бесконечно гладкая функция. Можно говорить и о гипоэллиптическом уравнении.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $a(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы фундаментальное решение $\mathcal{E}$ уравнения $a(D)u = 0$ было бесконечно гладким вне начала координат.*

Доказательство. Небходимость очевидна, так как $a(D)\mathcal{E} = \delta(x)$. Докажем достаточность. Пусть $a(D)u = f$ в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^\infty$ в области Ω. Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и докажем, что она не принадлежит сингулярному носителю решения. Возьмем функцию $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 вблизи x_0 и нулю вне окрестности, лежащей внутри Ω. Имеем $a(D)[\psi u] = f_1$, где $f_1 = f$ вблизи x_0, так что x_0 не принадлежит $\operatorname{sing\,supp} f_1$. Далее, $u = \mathcal{E} * f_1$ по теореме 3 из п. 1 и $\operatorname{sing\,supp}[\psi u] \subset \operatorname{sing\,supp} f_1$ по теореме 2 из п. 2. Значит, x_0 не принадлежит $\operatorname{sing\,supp} u$. □

В частности, уравнение Лапласа гипоэллиптично.

Существуют алгебраические критерии гипоэллиптичности (по свойствам многочлена $a(\xi)$). Один из них состоит в следующем:

Теорема 2. *Оператор $a(D)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда расстояние $d(\xi)$ от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до поверхности $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : a(\zeta) = 0\}$ стремится к бесконечности при $\xi \to \infty$.*

На доказательстве останавливаться не будем. Это доказательство и другие критерии можно найти, например, в книге Л. Хёрмандера "Линейные дифференциальные операторы с частными производными", М., Мир, 1965.

В частности, эллиптические операторы (т. е. операторы $a(D)$ с отличным от 0 при $\xi \neq 0$ главным символом $a_0(\xi)$) гипоэллиптичны.

Задача. Выведите это из только что приведенного критерия гипоэллиптичности.

Мы *докажем* гипоэллиптичность эллиптических уравнений позднее даже при переменных (бесконечно гладких) коэффициентах средствами исчисления псевдодифференциальных операторов.

На самом деле решения эллиптических уравнений $a(D)u = f$ *аналитически гипоэллипичны*: если для каждой точки некоторой области правая часть уравнения разлагается в ряд Тейлора по степеням расстояния от этой точки, то то же верно для решения. Обратное утверждение тоже справедливо: из аналитической гипоэллиптичности уравнения $a(D)u = 0$ вытекает его эллиптичность. Это теорема И.Г. Петровского (доказанная им для уравнений с аналитическими коэффициентами).