ЛЕКЦИЯ 8.

4. Транспонированный оператор. Замена переменных. Этот и следующий пункты содержат полезный технический материал.

Определение. Пусть L и ${}^tL$ – два непрерывных оператора на пространстве основных функций $\mathcal{X}$, связанные формулой

$$\langle L\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, {}^tL\varphi\rangle \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{X}). \tag{1}$$

Тогда оператор ${}^tL$ называется *транспонированным* к L. Пусть теперь оператор L продолжен до непрерывного оператора на пространстве обобщенных функций $\mathcal{X}'$ по формуле

$$\langle Lf, \varphi\rangle = \langle f, {}^tL\varphi\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{X}'). \tag{2}$$

Тогда по-прежнему ${}^tL$ называется оператором, транспонированным к L.

Примеры:

1) Оператор дифференцирования: $L = D^\alpha, \quad {}^tL = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha$.

2) Оператор умножения на функцию: $L = a(x)\cdot = {}^tL$.

3) Линейный оператор в частных производных:

$$L = a(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad {}^tL = {}^ta(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}D^\alpha[a_\alpha(x)\cdot].$$

4) Преобразование Фурье: $L = F = {}^tL$.

Уточните сами предположения об $a(x)$ в примере 2 в зависимости от пространства $\mathcal{X}$, о коэффициентах в примере 3) и о пространствах в примере 4.

5) Оператор сдвига $Lf(x) = f(x - x_0), \ {}^tL\varphi(x) = \varphi(x + x_0)$.

Например, $\delta(x - x_0)$ является сдвигом обобщенной функции $\delta(x)$:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), \varphi(x + x_0)\rangle. \tag{3}$$

6) Можно рассмотреть более общие обратимые гладкие замены переменных. Пусть задан диффеоморфизм $\chi : x \mapsto y = y(x)$ области Ω_1 на область Ω_2, и пусть $\psi(y)$ – функция на Ω_2. Формула

$$(\chi^*\psi)(x) = \psi(\chi(x)) = \psi(y(x)) \tag{4}$$

определяет отображения

$$C^\infty(\Omega_2) \to C^\infty(\Omega_1), \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_2) \to L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_1), \quad \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}(\Omega_1). \tag{5}$$

Чтобы продолжить χ^* до отображения $\mathcal{D}'(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$, найдем транспонированный оператор. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Тогда

$$\int \psi(y(x))\varphi(x)\,dx = \int \psi(y)\varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|\,dy,$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

где $x = x(y)$ – обратный к χ диффеоморфизм области Ω_2 на область Ω_1 и справа появился модуль определителя Якоби. Таким образом,

$$({}^t\chi^*)(\varphi(x)) = \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|. \tag{6}$$

Для обобщенных функций f положим

$$\langle \chi^* f, \varphi(x)\rangle = \langle f, \varphi(x(y))|\det \partial x/\partial y|\rangle. \tag{7}$$

7) Еще один важный частный случай – *гомотетия*:

$$\chi(x) = y = tx, \quad (\chi^*)\psi(x) = \psi(tx) \quad (t > 0). \tag{8}$$

Она определена, в частности, в $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$. Транспонированный оператор имеет вид $\varphi(x) \mapsto t^{-n}\varphi(y/t)$. Для обобщенных функций f (из $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'$) определение гомотетии $f(x) \mapsto f(tx)$ принимает вид

$$\langle f(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle f(y), \varphi(y/t)\rangle,$$

или

$$\langle f(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle f(x), \varphi(x/t)\rangle. \tag{9}$$

Иногда нужна гомотетия с отрицательным t; тогда в (9) t^{-n} заменяется на $|t|^{-n}$.

5. Однородные обобщенные функции.

Определение. Обобщенная функция f называется (положительно) *однородной степени* s, если

$$f(tx) = t^s f(x) \quad (t > 0), \tag{10}$$

т.е.

$$t^{-n}\langle f(x), \varphi(x/t)\rangle = t^s\langle f(x), \varphi(x)\rangle \quad (t > 0). \tag{11}$$

Примеры и замечания. 1. Функция $|x|^s$ на $\mathbb{R}^n$ локально интегрируема при $s > -n$. Функционал типа этой функции является, конечно, однородной обобщенной функцией той же степени. Проведите сами формальную проверку.

2. Дельта-функция однородна степени $-n$:

$$\langle \delta(tx), \varphi(x)\rangle = t^{-n}\langle \delta(x), \varphi(x/t)\rangle = t^{-n}\varphi(0).$$

3. *Если обобщенная функция f однородна степени s, то любая ее производная однородна степени $s - 1$.*

Действительно,

$$t^{-n}\langle \partial_j f, \varphi(x/t)\rangle = -t^{-n}\langle f, \partial_j\varphi(x/t)\rangle = -t^{-n-1}\langle f, (\partial_j\varphi)(x/t)\rangle.$$

Из (11) следует, что правая часть равна

$$-t^{s-1}\langle f, \partial_j\varphi(x)\rangle = t^{s-1}\langle \partial_j f, \varphi(x)\rangle,$$

что и доказывает наше утверждение.

3. *Уравнение Эйлера для однородных обобщенных функций.* Уравнение Эйлера для обычных однородных степени s функций имеет, как известно, вид

$$\sum_1^n x_j \partial_j f(x) = sf(x). \tag{12}$$

Это условие эквивалентно однородности функции f степени s. Проверим, что это утверждение остается в силе для обобщенных функций. Для них уравнение (12) означает, что

$$-\langle f, \sum \partial_j (x_j \varphi(x))\rangle = s\langle f, \varphi\rangle,$$

или

$$-\langle f, \sum x_j \partial_j \varphi(x)\rangle = (s+n)\langle f, \varphi\rangle. \tag{13}$$

Пусть f – обобщенная функция, однородная степени s. Это означает, что

$$\langle f, \varphi(x/t)\rangle = t^{s+n}\langle f, \varphi(x)\rangle.$$

Продифференцируем это тождество по t. Чтобы обосновать приведенное ниже вычисление производной левой части, следует временно заменить f подходящей обобщенной функцией с компактным носителем и использовать структуру таких обобщенных функций. Получим

$$-\langle f, \sum x_j t^{-2} f(x/t)\rangle = (s+n)t^{s+n-1}\langle f, \varphi(x)\rangle.$$

Полагая $t = 1$, получаем (13).

Обратно, пусть имеет место соотношение (13). Рассмотрим дробь

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t)\rangle}{t^{s+n}}.$$

Продифференцируем ее по t. Получим

$$\frac{-\langle f, \sum x_j t^{-2} \partial_j \varphi(x/t)\rangle t^{s+n} - \langle f, \varphi(x/t)\rangle (s+n) t^{s+n-1}}{t^{2(s+n)}} = 0$$

в силу (13) с x/t вместо x. Значит,

$$\frac{\langle f, \varphi(x/t)\rangle}{t^{s+n}} = \text{const} = \langle f, \varphi(x)\rangle,$$

т.е. f однородна степени s. □

5. *Пусть обобщенная функция f однородна степени s. Тогда ее преобразование Фурье однородно степени $-n-s$.*

Действительно, нам дано соотношение (11), и надо проверить, что

$$t^{-n}\langle Ff, \psi(\xi/t)\rangle = t^{-s-n}\langle Ff, \psi(\xi)\rangle. \tag{14}$$

Пусть $\varphi(x) = F[\psi(\xi)]$. Левая часть в (14) равна

$$t^{-n}\langle f, F[\psi(\xi/t)]\rangle = t^{-n}\langle f, \int \psi(\xi/t)e^{-ix\cdot\xi}d\xi\rangle.$$

Здесь в интеграле делаем замену $\xi/t = \eta$. Получаем, что правая часть равна $\langle f, \varphi(xt)\rangle$, т.е., с учетом (11),

$$t^{-n-s}\langle f, \varphi(x)\rangle = t^{-n-s}\langle f, F[\psi(\xi)]\rangle = t^{-n-s}\langle Ff, \psi(x)\rangle,$$

что совпадает с правой частью в (14). □

6. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Уравнение

$$\Delta\mathcal{E} = \delta(x) \tag{15}$$

при преобразовании Фурье переходит в уравнение

$$-|\xi|^2 F\mathcal{E} = 1. \tag{16}$$

Умножим его на $-1/|\xi|^2$. Это формальная операция, так как обобщенные функции мы умеем умножать только на бесконечно гладкие функции. Однако рассмотрим получающуюся формулу

$$(F\mathcal{E})(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}. \tag{17}$$

Здесь справа – локально интегрируемая функция, *если* $n \geq 3$. В этом случае ее обратное преобразование Фурье – обобщенная функция, однородная степени $-n+2$. Кроме того, правая часть в (17) сферически симметрична, т.е. не меняется при поворотах системы координат. Отсюда можно вывести, что ее обратное преобразование Фурье тоже сферически симметрично. (Здесь ЗАДАЧА. Обозначив через χ поворот системы координат, найдите найдите χ^* для обобщенных функций и проверьте, что сферическая симметрия обобщенной функции влечет сферическую симметрию ее преобразования Фурье, как прямого, так и обратного.)

Сказанное позволяет предположить, что фундаментальное решение $\mathcal{E}$ можно найти в виде

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}, \tag{18}$$

при $n \geq 3$ это тоже локально интегрируемая функция. Это подтверждается следующей выкладкой, использующей формулу Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega [\Delta u(x)\cdot v(x)\,dx - u(x)\cdot\Delta v(x)]\,dx = \int_\Gamma [\partial_\nu u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot\partial_\nu v(x)]\,dS. \tag{19}$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, ∂_ν – производная по внешней нормали, u и v – функции класса $C^2(\overline{\Omega})$.

Мы имеем, полагая $r = |x|$,

$$\langle \Delta r^{-n+2}, \varphi \rangle = \langle r^{-n+2}, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geq \varepsilon} r^{-n+2} \Delta\varphi(x)\, dx.$$

Окрестность начала вырезана из-за особенности у r^{-n+2}. По формуле Грина (19), интеграл в правой части равен (с учетом того, что ∂_r – производная по внутренней нормали)

$$\int_{r \geq \varepsilon} \Delta r^{-n+2} \cdot \varphi(x)\, dx - \int_{r=\varepsilon} r^{-n+2} \partial_r \varphi(x)\, dS + \int_{r=\varepsilon} \partial_r r^{-n+2} \cdot \varphi(x)\, dS.$$

Справа первый интеграл равен нулю, так как функция r^{-n+2} гармонична вне начала координат. Второй стремится к нулю, так как "площадь" сферы радиуса ε имеет порядок ε^{n-1}. Третий стремится к $-(n-2)\sigma_{n-1}\varphi(0)$, где σ_{n-1} – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом,

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = \widetilde{c}_n \delta(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{c}_n = -(n-2)\sigma_{n-1}, \tag{20}$$

при $n \geq 3$, так что в этом случае

$$\mathcal{E}_n(x) = \frac{1}{\widetilde{c}_n r^{n-2}} \tag{21}$$

– фундаментальное решение.

Площадь единичной сферы σ_{n-1} обычно вычисляется в курсе анализа. Напомним кратко, как это делается.

Положим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I_n = \int_{R^n} e^{-|x|^2} dx.$$

Ясно, что $I_n = I_1^n$. Вычисляя интеграл I_n переходом к сферическим координатам и подстановкой $r^2 = t$, получаем

$$I_n = \sigma_{n-1} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \sigma_{n-1} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\sigma_{n-1}}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Кроме того,

$$I_2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi,$$

так что $I_1 = \sqrt{\pi}$, $I_n = \pi^{n/2}$. В итоге

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{22}$$

Используя известные формулы для гамма-функции, в частности, формулу $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, получаем окончательно

$$\sigma_{2k+1} = \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \qquad \sigma_{2k} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)!!}, \tag{23}$$

где в последнем знаменателе – произведение нечетных чисел от 1 до $2k-1$.

Для фундаментального решения при $n = 3$ получается формула

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}. \tag{24}$$

Случай $n = 2$. При $n = 2$ функция r^{-2} не является локально интегрируемой и наше первоначальное рассуждение не проходит. Но если начать с функции $\ln r$, гармонической вне начала, то можно заметить следующее. Обобщенная функция $\Delta \ln r$ сосредоточена в начале координат и, значит, является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. Но первые производные логарифма однородны степени -1 (и, как и логарифм, локально интегрируемы). Поэтому обобщенная функция $\Delta \ln r$ однородна степени -2. Значит, она пропорциональна дельта-функции:

$$\Delta \ln r = \widetilde{c}_2 \delta(x).$$

Постоянная вычисляется, как выше, при помощи формулы Грина для оператора Лапласа; она равна 2π.

Задача: проведите это вычисление.

Таким образом, при $n = 2$ получается фундаментальное решение

$$\mathcal{E}_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \tag{25}$$

Как строятся фундаментальные решения общих эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами, можно прочитать в книге И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова “Обобщенные функции и действия над ними”.