ЛЕКЦИЯ 9.

6. Фундаментальное решение общего уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема. *Для любого уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами*

$$a(D)u = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = 0 \tag{1}$$

существует фундаментальное решение $\mathcal{E}$.

Доказательство (Хёрмандер). Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ и $\psi(\xi) = F^{-1}[\varphi]$. Мы положим

$$\langle \mathcal{E}, \varphi\rangle = \langle F\mathcal{E}, \psi\rangle = \int_H \frac{\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\xi, \tag{2}$$

где H – некоторая поверхность в $\mathbb{C}^n$, "параллельная" $\mathbb{R}^n$.

При $n = 1$ достаточно взять прямую

$$\{\zeta = \xi + i\tau : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

с таким постоянным τ, что она не проходит через нули многочлена $a(\zeta)$. Тогда интеграл существует и

$$\langle a(D)E, \varphi\rangle = \langle E, a(-D)\varphi\rangle =$$
$$\int_H \frac{a(\zeta)\psi(\zeta)}{a(\zeta)} d\xi = \int_H \psi(\zeta)\, d\xi = \int_R \psi(\xi)\, d\xi = \varphi(0),$$

что и требуется. Здесь использованы быстрое убывание функции $\psi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| \le \text{const}$ и формула

$$\varphi(x) = \int e^{-ix\cdot\xi}\psi(\xi)\, d\xi.$$

При $n > 1$ мы предположим, что в $a(D)$ коэффициент при старшей производной D_n^m – ненулевое число.

Задача. Покажите, что этого всегда можно добиться подходящим поворотом системы координат.

Выход в комплексную область осуществляется тогда по переменному ζ_n при каждом $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Если фиксировать ξ', то можно выбрать такое $\tau = \tau(\xi')$, что, скажем, $|\tau| \le m + 1$ и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau)| \ge \text{const} > 0 \tag{3}$$

при всех ξ_n, где постоянная не зависит от ξ.

Далее, каждая точка ξ_0' имеет окрестность $O(\xi_0')$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такую, что неравенство вида (3) (с вдвое меньшей константой) выполнено при всех ξ с $\tau = \tau(\xi_0')$. Из покрытия пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ такими окрестностями можно

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

выбрать локально конечное. Таким образом, можно указать такое покрытие $\{O_j\}_1^\infty$ пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и такие значения $\tau = \tau_j$, что $|\tau_j| \le m+1$ и

$$|a(\xi', \xi_n + i\tau_j)| \ge \text{const} > 0 \quad \text{при } \xi' \in O_j,\ \xi_n \in \mathbb{R} \tag{4}$$

с постоянной, не зависящей от j. Заменим O_j на

$$\Omega_1 = O_1,\ \Omega_2 = O_2 \setminus \Omega_1,\ \Omega_3 = O_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

и т.д. Теперь определим H как множество всех точек

$$\zeta = (\xi', \xi_n + i\tau),\ \text{где } \tau = \tau_j \text{ при } \xi' \in \Omega_j. \tag{5}$$

Это множество называют *лестницей Хёрмандера*. Проверка того, что формула (2) определяет фундаментальное решение, проводится так же, как в одномерном случае.

Задача. Проведите эту проверку.

Этим доказательство заканчивается. □

7. Решения гипоэллиптических уравнений с изолированными особенностями. Мы докажем теорему о структуре решения гипоэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами вне некоторой точки, при подходе к которой это решение оценивается по модулю некоторой степенью расстояния от нее.

Теорема 1. *Пусть $a(D)$ – гипоэллиптический оператор, $\mathcal{E}(x)$ – фундаментальное решение уравнения $a(D)u = 0$, Ω – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, и $u(x)$ – функция из $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$, удовлетворяющая уравнению $a(D)u = 0$ в $\Omega \setminus \{0\}$. Предположим, что вблизи начала*

$$|u(x)| \le C|x|^{-N} \tag{6}$$

с некоторыми положительными постоянными C и N. Тогда

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x) + u_0(x) \tag{7}$$

при некотором s, где c_α – постоянные и $u_0(x)$ – решение уравнения $a(D)u_0 = 0$ в Ω.

Ввиду гипоэллиптичности $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{E}(x)$ – бесконечно гладкая функция вне начала координат. Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция $u(x)$ принадлежит $C^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ и удовлетворяет условию (6) вблизи начала. Тогда существует такая обобщенная функция $\widetilde{u} \in \mathcal{D}(\Omega)$, что ее сужение на Ω совпадает с $u(x)$.*

Доказательство. Пусть функция $\psi(x)$ из $\mathcal{D}(\Omega)$ равна 1 вблизи начала. Полагаем для $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \widetilde{u}, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x) \left[\varphi(x) - \psi(x) \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right] dx. \tag{8}$$

Функция в квадратных скобках есть $O(|x|^N)$. Поэтому интеграл сходится и определяет, конечно, обобщенную функцию в Ω. Если $\varphi(x) = 0$ в окрестности начала, то $\widetilde{u}$ действует на φ как $u(x)$. $\square$

Доказательство теоремы. Используя лемму, имеем

$$a(D)\widetilde{u} = a(D)u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \{0\}.$$

Поэтому носитель обобщенной функции $a(D)\widetilde{u}$ – точка 0 и

$$a(D)\widetilde{u} = \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x). \tag{9}$$

Положим

$$u_0(x) = \widetilde{u} - \sum_{|\alpha| \le s} c_\alpha \partial^\alpha \mathcal{E}(x).$$

Это обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\Omega)$, и ввиду (9) $a(D)u_0 = 0$ в Ω, так что $u_0 \in C^\infty(\Omega)$. В $\Omega \setminus \{0\}$ получаем (7). $\square$

В качестве следствия получается *теорема об устранимой особенности для гармонических функций.* Пусть снова Ω – область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в $\Omega \setminus \{0\}$, и пусть вблизи начала*

$$u(x) = o(|x|^{-n+2}), \text{ если } n \ge 3, \quad o(\ln |x|^{-1}), \text{ если } n = 2. \tag{10}$$

Тогда $u(x)$ – гармоническая функция в Ω.

Действительно, из предположения (10) следует, что в (7) все c_α равны 0, это получается последовательно, начиная с α с наибольшим $|\alpha|$, с учетом формул для фундаментального решения. $\square$

8. Теорема Лиувилля и ее обобщения. Теорема Лиувилля для гармонических функций будет приведена в конце этого пункта. Мы начнем с более общей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a(0) = 0$ и $a(\xi) \ne 0$ при остальных вещественных ξ, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $a(D)u = 0$. Тогда u – многочлен.*

Доказательство. Пусть $v = Fu$. Тогда $a(\xi)v = 0$. Поэтому обобщенная функция v сосредоточена в начале. Действительно, если $\psi \in \mathcal{D}$ равна 0 в окрестности начала, то

$$\langle v, \psi \rangle = \langle v, a(\xi) \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = \langle a(\xi)v, \frac{\psi(\xi)}{a(\xi)} \rangle = 0.$$

Значит,

$$v(x) = \sum_{|\alpha|\le s} b_\alpha \partial^\alpha \delta(x), \quad u(x) = \sum_{|\alpha|\le s} c_\alpha x^\alpha. \ \square$$

Напомним, что $u \in \mathcal{S}$, если, например, это непрерывная функция умеренного роста (т.е. роста не выше степенного). В частности, это может быть обычное (достаточно гладкое) решение. Таким образом, обычное решение $u(x)$ умеренного роста оказывается многочленом. Если же предположить, что $u(x)$ – ограниченное обычное решение, то получим, что это постоянная. Например, то и другое верно для гармонических функций. Теорема о постоянстве ограниченной в $\mathbb{R}^n$ гармонической функции – это и есть *теорема Лиувилля.*[1]

Отметим, что условие $a(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ существенно в теореме: если $a(\xi_0) = 0$ при некотором $\xi_0 \neq 0$, то имеется решение $e^{ix\cdot\xi_0}$.

Задача. Пусть $a(\xi) \neq 0$ при всех вещественных ξ. Проверьте, что тогда решение $u \in \mathcal{S}$ уравнения $a(D)u = 0$ оказывается тождественным нулем.

9. Однородные обобщенные функции (окончание). Этот пункт содержит существенные дополнения к п. 5.

Аналитическое продолжение обобщенной функции f^λ. Обобщенная функция f_λ, зависящая от числового параметра λ, называется *аналитической по λ* в некоторой области на комплексной плоскости, если числовая функция $\langle f_\lambda, \varphi\rangle$ аналитична по λ в этой области.

Пусть $f(x)$ – положительно однородная степени 1 непрерывная функция, положительная при $x \neq 0$. Функция $f^\lambda(x)$ локально интегрируема при $\operatorname{Re}\lambda > -n$ и определяет, конечно, аналитическую обобщенную функцию в этой полуплоскости. Рассмотрим вопрос о ее аналитическом продолжении. Запишем

$$\langle f^\lambda, \varphi\rangle = \int_\Omega f^\lambda(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_{R^n\setminus\Omega} f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx, \quad (11)$$

где Ω – какая-нибудь ограниченная область, содержащая начало координат. Функцию φ считаем принадлежащей $\mathcal{D}$. Чтобы осуществить аналитическое продолжение, преобразуем последний интеграл. Используя уравнение Эйлера для f^λ, имеем

$$\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\sum_1^n \int_\Omega x_k \partial_k f^\lambda(x)\,dx.$$

Интегрируя справа по частям, получаем, что

$$\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_\Gamma f^\lambda(x)\omega - \frac{n}{\lambda}\int_\Omega f^\lambda(x)\,dx, \quad (12)$$

где Γ – граница области Ω (предполагаем границу гладкой) и форма ω определяется равенством

$$\omega = x_1 dx_2 \dots dx_n - x_2 dx_1 dx_3 \dots dx_n + \dots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \dots dx_{n-1}. \quad (13)$$

[1] Для гармонической вещественной функции известно более сильное утверждение: она постоянна, если ограничена с одной стороны.

Таким образом,

$$\int_\Omega f^\lambda(x)dx = \frac{1}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda\omega \tag{14}$$

и

$$\langle f^\lambda,\varphi\rangle = \int_\Omega f^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\,dx + \int_{R^n\setminus\Omega} f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int_\Gamma f^\lambda(x)\,dx. \tag{15}$$

По этой формуле левая часть аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$, проколотую в точке $\lambda=-n$, где имеется, вообще говоря, простой полюс с вычетом

$$\frac{\varphi(0)}{\lambda+n}\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{16}$$

В силу единственности аналитического продолжения это вычет не зависит от выбора области Ω. Можно сказать, что *обобщенная функция f^λ аналитически продолжена в полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda > -n-1$ *без точки $-n$ с простым полюсом в этой точке и вычетом*

$$\delta(x)\int_\Gamma \frac{\omega}{f^n(x)}. \tag{17}$$

Геометрический смысл интеграла, входящего в выражение для вычета, легко выясняется при помощи формулы Стокса. Пусть Ω – область, определяемая неравенством $f(x)<1$. Так как

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega d\omega = n\int_\Omega dx = n\operatorname{Vol}(\Omega),$$

то этот интеграл есть объем указанной области, умноженный на размерность n.

Возможно и дальнейшее аналитическое продолжение обобщенной функции f^λ, для чего в (11) из $\varphi(x)$ надо вычитать не $\varphi(0)$, а бóльшие части тейлоровского разложения этой функции. Получается мероморфная по λ обобщенная функция с возможными простыми полюсами в точках $-n-m$, где m пробегает все натуральные числа. См. И.М. Гельфанд и Г.Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними.

Сказанное, в частности, приложимо к обобщенной функции r^λ. Можно показать, что $r^\lambda/\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)$ продолжается до целой аналитической функции от λ.