Письменный экзамен

для получения оценки «отлично»
достаточно полностью решить любые 4 задачи

Задача 1. Рассмотрим гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$, состоящую из всех вырожденных квадрик $Q \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = (n+1)$. Докажите, что:

а) точка $Q \in S$ тогда и только тогда неособа, когда соответствующая квадрика в $\mathbb{P}_n$ имеет единственную особую точку;

б) касательное пространство T_QS к S в такой точке состоит из всех квадрик в $\mathbb{P}_n$, проходящих через вершину Q.

Задача 2. Обозначим через $W \subset S^3V^*$ подпространство всех кубических форм, зануляющихся в данных 6 точках $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, не лежащих ни на какой конике, и пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(W)$, $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(W^*)$. Сопоставим каждой точке $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ множество $C_p \subset \mathbb{P}_n$ всех кубических кривых из $\mathbb{P}(W)$, проходящих через p. Докажите, что

а) $C_p \subset \mathbb{P}_n$ является там гиперплоскостью (т. е. точкой из $\mathbb{P}_n^\times$) и найдите n;

б) когда p пробегает любую из 12 прямых (p_ip_j), соответствующая точка $C_p \in \mathbb{P}_n^\times$ рисует там прямую;

в) когда p пробегает любую из 6 коник, проходящих через какие-то 5 точек из $p_1, p_2, \dots, p_6$, соответствующая точка $C_p \in \mathbb{P}_n^\times$ также рисует там прямую;

г) кубики из W, содержащие любую из предыдущих пяти коник в качестве компоненты, составляют прямую в $\mathbb{P}_n$.

Задача 3. Докажите, что на пространстве однородных форм четвёртой степени от 4 переменных имеется универсальный многочлен от коэффициентов формы, обращение которого в нуль на форме F равносильно тому, что квартика, заданная в $\mathbb{P}_3$ уравнением $F = 0$, содержит прямую.

Задача 4. Для всякого возрастающего набора индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ положим $\#I \overset{\text{def}}{=} k$, $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum i_\nu$, $\widehat{I} \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$, рассмотрим векторное пространство V с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, и фиксируем соответствующий базис $e_I \overset{\text{def}}{=} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^kV$ пространства однородных грассмановых форм k-ой степени. Тогда

$$e_I \wedge e_{\widehat{I}} = \pm e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \ . \tag{1}$$

а) Точно вычислите знак в (1) в терминах $|I|$, n, k.

б) Докажите, что для любого набора J из k столбцов произвольной $n \times n$ - матрицы A имеет место *соотношение Лапласа*:

$$\sum_I (-1)^{|I|+|J|} A_{IJ} A_{\widehat{I}\widehat{J}} = \det(A) \ ,$$

где I пробегает всевозможные наборы из k строк матрицы A, а A_{IJ} обозначает $k \times k$ - минор A, расположенный в пересечениях строк из I и столбцов из J.

Задача 5. Рассмотрим тривиальное векторное расслоение $E = \mathbb{C}^r \times \mathbb{A}_n$ над $\mathbb{A}_n$. Верно ли, что любое его нигде не обращающееся в нуль регулярное (алгебраическое) сечение $\mathbb{A}_n \xhookrightarrow{s} E$ можно дополнить до глобального базиса из регулярных сечений для **а)** $n = 1$? **б)** $\forall\, n$?

Задача 6. Докажите, что всякое алгебраическое 2–2 соответствие на неособой конике $C \subset \mathbb{P}_2$ реализуется каждым из следующих двух способов при помощи подходящей коники C':

а) $p \leftrightarrow q \iff (pq)$ касается C'; **б)** $p \leftrightarrow q \iff T_pC \cap T_qC \in C'$.

Задача 7. Докажите, что всякое локально тривиальное алгебраическое расслоение над $\mathbb{P}_1$ является прямой суммой одномерных расслоений вида $\mathcal{O}(d)$.