Часть 1. Характеры

Определение 1.1. Характером представления $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется функция $\chi_\rho : G \to K$, определяемая формулой $\chi_\rho(g) := \operatorname{Tr}\rho(g)$.

Лемма 1.2. *Имеем (i) $\chi_\rho(1) = \dim\rho$; (ii) $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$ при всех $g, h \in G$.*

Доказательство: (i) $\chi_\rho(1) = \operatorname{Tr}\rho(1) = \operatorname{Tr}\mathrm{Id}_V = \dim V = \dim\rho$. (ii) Пользуясь тем, что $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$, получаем $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \operatorname{Tr}\rho(ghg^{-1}) = \operatorname{Tr}\rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \operatorname{Tr}\rho(g)^{-1}\rho(g)\rho(h) = \operatorname{Tr}\rho(h) = \chi_\rho(h)$. $\square$

Примеры 1.3.
1. Характер тривиального представления: $\chi_1 \equiv 1$.
2. Характер знакового представления: $\chi_\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.
3. Характер регулярного представления: $\chi_{K[G]}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{если } g = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

В дальнейшем, для обозначения характера представления $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ в пространстве V будем использовать также обозначение χ_V.

Лемма 1.4. *Имеем (i) $\chi_{U\oplus V} = \chi_U + \chi_V$; (ii) $\chi_{U\otimes V} = \chi_U\chi_V$; (iii) $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$.*

Доказательство: (i) Очевидно — след прямой суммы операторов равен сумме их следов.

(ii) Аналогично, нам надо показать, что след тензорного произведения операторов равен произведению их следов. Выберем базисы в пространствах U и V и рассмотрим операторы $A \in \mathrm{End}(U)$, $B \in \mathrm{End}(V)$ с матрицами (A_i^j) и (B_k^l) соответственно. Тогда матрица оператора $A \otimes B$ равна $(A_i^j B_k^l)$, а его след — сумме $\sum_{(i,k)=(j,l)} A_i^j B_k^l = \sum_{i,k} A_i^i B_k^k = (\sum_i A_i^i)(\sum_k B_k^k) = \operatorname{Tr} A \operatorname{Tr} B$.

(iii) $\chi_{V^*}(g) = \operatorname{Tr}\rho^*(g) = \operatorname{Tr}\rho(g^{-1})^* = \operatorname{Tr}\rho(g^{-1}) = \chi_V(g^{-1})$. $\square$

Часть 2. Соотношения ортогональности

Характер представления очень полезен по следующим причинам. Во-первых, он легко вычислим. А вовторых, как мы покажем ниже, в терминах характера можно вычислять важнейшие численные параметры представления с одной небольшой оговоркой. Дело в том, что если характеристика поля равна $p > 0$, то численые параметры вычисляются лишь по модулю p. Таким образом, теряется значительная часть информации. Поэтому, начиная с этого места будем считать, что $\operatorname{char} K = 0$.

Определение 2.1. Функция $f : G \to K$ называется центральной, если $f(ghg^{-1}) = f(h)$ при всех $g, h \in G$.

Обозначим через $C_K(G)$ пространство всех центральных K-значных функций на группе G. Ясно, что характеры представлений являются элементами пространства $C_K(G)$.

Лемма 2.2. *$C_K(G)$ — конечномерное векторное пространство, причем его размерность равна количеству классов сопряженности в группе G.*

Доказательство: всякая центральная функция по определению постоянна на классах сопряженности. $\square$

Рассмотрим K-значную билинейную форму на $C_K(G)$:

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g^{-1})f_2(g).$$

Лемма 2.3. *Билинейная форма $\langle -, -\rangle$ на $C_K(G)$ симметрична и невырождена.*

Доказательство: подставляя $g^{-1} = h$ и замечая, что отображение $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ — биекция, получаем $\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g^{-1})f_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} f_1(h)f_2(h^{-1}) = \langle f_2, f_1\rangle$. Кроме того, заметим что это отображение переводит класс сопряженности в класс сопряженности, то есть индуцирует некоторую перестановку на множестве классов сопряженности. Выбирая в качестве базиса пространства $C_K(G)$ дельта-функции классов сопряженности, видим, что матрица Грама формы $\langle -, - \rangle$ в этом базисе является матрицей перестановки (умноженной на $\frac{1}{|G|}$), следовательно невырождена. □

Чуть ниже мы докажем, что характеры неприводимых представлений образуют ортогональный базис в пространстве $C_K(G)$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4. $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g) = \dim V^G$.

Доказательство: так как след оператора — линейная функция, то левая часть равенства равна следу оператора Sym_G усреднения по группе. Но, как было показано, оператор Sym_G является проектором на подпространство инвариантов V^G, следовательно его след равен размерности этого пространства. □

Теорема 2.5. *(i) Если U и V — неприводимые представления и $U \ncong V$, то $\langle \chi_U, \chi_V\rangle = 0$.*
(ii) Если U — неприводимое представление, а поле K — алгебраически замкнуто, то $\langle \chi_U, \chi_U\rangle = 1$.

Доказательство: заметим, что $\chi_U(g^{-1})\chi_V(g) = \chi_{U^*}(g)\chi_V(g) = \chi_{U^*\otimes V}(g) = \chi_{\mathrm{Hom}(U,V)}(g)$, значит по предыдуще лемме имеем $\langle \chi_U, \chi_V\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}(U,V)}(g) = \dim \mathrm{Hom}(U,V)^G = \dim \mathrm{Hom}_G(U,V)$. Далее остается применить лемму Шура: если $U \ncong V$, то $\mathrm{Hom}_G(U,V) = 0$, значит $\langle \chi_U, \chi_V\rangle = 0$; если же $V = U$ и $\bar{K} = K$, то $\mathrm{Hom}_G(U,U)$ одномерно, значит $\langle \chi_U, \chi_U\rangle = 1$. □

Замечание 2.6. Если не предполагать алгебраическую замкнутость поля K, то можно лишь сказать, что $\langle \chi_U, \chi_U\rangle = \dim \mathrm{End}_G(U)$. В частности, $\langle \chi_U, \chi_U\rangle$ является целым положительным числом.

Следствие 2.7. *Количество классов изоморфизма неприводимых представлений группы G не превосходит количества ее классов сопряженности.*

Часть 3. Следствия соотношений ортогональности

Сначала опишем ситуацию в случае, когда поле K алгебраически замкнуто.

Следствие 3.1. *Имеем $\langle \chi_V, \chi_V\rangle \in \mathbb{Z}_{>0}$, причем V неприводимо $\iff \langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$.*

Доказательство: из теоремы Машке следует, что V раскладывается в прямую сумму неприводимых. Из леммы 1.4 следует, что $\chi_V = \sum_\rho \mathrm{mult}_\rho(V)\chi_\rho$. Следовательно, $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = \sum_\rho \mathrm{mult}_\rho(V)^2$. □

Следствие 3.2. *Если U неприводимо, то $\mathrm{mult}_U(V) = \langle \chi_U, \chi_V\rangle$.*

Доказательство: аналогично, записывая $\chi_V = \sum_\rho \mathrm{mult}_\rho(V)\chi_\rho$ и вычисляя скалярное произведение с χ_U, пользуясь соотношениями ортогональности, получаем искомое равенство. □

Следствие 3.3. *Представления V и W изоморфны $\iff \chi_V = \chi_W$.*

Доказательство: равенство характеров изоморфных представлений очевидно, а если характеры равны, то по предыдущему следствию кратности всех неприводимых представлений в V и W совпадают, следовательно V и W изоморфны. □

Следствие 3.4. *Если U — неприводимо, то $\mathrm{mult}_U(K[G]) = \dim U$.*

Доказательство: согласно предыдущему следствию, нам надо вычислить скалярное произведение χ_U и $\chi_{K[G]}$. Получаем $\langle \chi_U, \chi_{K[G]}\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_U(g^{-1})\chi_{K[G]}(g) = \frac{1}{|G|}\chi_U(1)|G| = \chi_U(1) = \dim U$. □

Лемма 3.5. *Характеры неприводимых представлений порождают пространство $C_K(G)$.*

Доказательство: достаточно проверить, что ортогонал ко всем характерам равен нулю. Предположим, что центральная функция φ ортогональна всем характерам. Значит $\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\chi_\rho(g)=0$ для всех неприводимых ρ. Рассмотрим оператор $c_\varphi=\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\rho(g)$. Легко видеть, что он коммутирует с действием группы: $c_\varphi\rho(h)=\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\rho(g)\rho(h)=\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\rho(h)\rho(h^{-1}gh)=\rho(h)\sum_{g\in G}\varphi((h^{-1}gh)^{-1})\rho(h^{-1}gh)=\rho(h)c_\varphi$. Следовательно, по лемме Шура оператор c_φ действует в представлении ρ умножением на константу. С другой стороны, ясно, что $\operatorname{Tr}c_\varphi=\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})\chi_\rho(g)=0$, значит c_φ действует нулем во всяком неприводимом представлении группы G. Но тогда c_φ действует нулем и в регулярном представлении, однако ясно, что $c_\varphi e_h=\sum_{g\in G}\varphi(g^{-1})e_{gh}$, следовательно $\varphi(g^{-1})=0$ при всех $g\in G$, то есть $\varphi=0$. $\square$

Подытожим вышесказанное.

Теорема 3.6. *Если поле K алгебраически замкнуто, то количество классов изоморфизма неприводимых представлений группы G равно количеству ее классов сопряженности, причем всякое неприводимое представление входит в регулярное представление с кратностью равной размерности. В частности $|G|=\sum_{i=1}^s d_i^2$, где s — количество классов сопряженности, а d_i — размерность i-го неприводимого представления.*

Если не предполагать алгебраическую замкнутость поля K, то $\operatorname{mult}_U(V)=\langle\chi_U,\chi_V\rangle/\dim\operatorname{End}_G(U)$. При этом по-прежнему изоморфность представлений равносильна равенству их характеров. Далее, $\operatorname{mult}_U(K[G])=\dim U/\dim\operatorname{End}_G(U)$, следовательно всякое неприводимое представление является прямым слагаемым регулярного, причем $|G|=\sum_{i=1}^c d_i^2/e_i$, где c — количество классов изоморфизма неприводимых представлений ($c\leqslant s$), d_i — размерность i-го неприводимого представления, а e_i — размерность алгебры его G-эндоморфизмов.

Следствие 3.7. *Если поле K алгебраически замкнуто, а группа G — абелева, то всякое наприводимое представление группы G одномерно, а их количество равно порядку группы.*

Доказательство: в абелевой группе всякий класс сопряженности состоит из одного элемента, следовательно их количество равно порядку группы. Из формулы $|G|=\sum_{i=1}^s d_i^2$ тогда следует, что $d_i^2=1$ для всех i, то есть все неприводимые — одномерны. $\square$

Замечание 3.8. Верно и обратное, если всякое неприводимое представление группы G одномерно, то группа абелева. Действительно, в этом случае все $d_i=1$, следовательно количество классов сопряженности в G равняется $|G|$, значит классы сопряженности состоят из одного элемента, то есть группа G абелева.

Часть 4. Тензорная структура и кольцо Гротендика

Обозначим через $R(G)$ абелеву группу, с образующими $[V]$, где V всевозможные (конечномерные) представления группы G, и соотношениями $[U\oplus V]=[U]+[V]$.

Лемма 4.1. *Группа $R(G)$ — свободная абелева группа ранга c.*

Доказательство: классы неприводимых представлений образуют базис в $R(G)$. $\square$

Лемма 4.2. *Тензорное произведение индуцирует на $R(G)$ структуру коммутативного кольца.*

Доказательство: достаточно заметить, что тензорное произведение представлений ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно (по отношению к прямой сумме), а тривиальное представление — единица. $\square$

Кольцо $R(G)$ называется кольцом Гротендика категории конечномерных G-модулей. Ясно, что сопоставляя представлению его характер получаем вложение колец $\chi: R(G)\to C_K(G)$.

Лемма 4.3. *Классы одномерных представлений группы G с операцией $\otimes$ образуют коммутативную подгруппу в мультипликативной группе кольца $R(G)$, которая изоморфна группе $\operatorname{Hom}(G,K^*)$.*

Доказательство: ясно, что если $\dim U=\dim V=1$, то $\dim U\otimes V=1$. Более того, легко видеть, что $V\otimes 1_G\cong V$ для всех V, то есть 1_G — единица. Наконец, заметим, что гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}: V\otimes V^*\to 1_G$ коммутирует с действием группы G, а при $\dim V=1$ является изоморфизмом. Поэтому V^* является обратным элементом к V в группе одномерных представлений. Теперь заметим, что если ρ одномерно, то $\rho\in\operatorname{Hom}(G,\mathrm{GL}(1;K))=\operatorname{Hom}(G,K^*)$. $\square$