Часть 1. Категории

Определение 1.1. Категория $\mathcal{C}$ — это следующие данные: 1) класс объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; 2) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; и 3) закон композиции, то есть отображение $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $(g, f) \mapsto g \circ f$, такие что выполняются свойства:

- **K1:** Ассоциативность: для любой четверки объектов $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любой тройки морфизмов морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ имеем $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- **K2:** Тождественный морфизм: для любого объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ существует морфизм $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, т.ч. для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ имеем $f \circ \mathrm{Id}_X = f$, $\mathrm{Id}_X \circ g = g$.

Примеры 1.2.
1. Категория множеств $\mathcal{S}ets$: объекты — множества, морфизмы — отображения.
2. Категория групп $\mathcal{G}r$: объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.
3. Категория G-множеств $\mathcal{S}ets^G$: объекты — G-множества, морфизмы — G-морфизмы.
4. Категория абелевых групп $\mathcal{A}b$: объекты — абелевы группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.
5. Категории колец $\mathcal{R}ings$, коммутативных колец $\mathcal{C}omm$, полей $\mathcal{F}ields$, и т.д.
6. Категории левых A-модулей A-Mod и правых A-модулей Mod-A.
7. Категория K-векторных пространств Vect_K.
8. Всякий моноид (группу) можно рассматривать как категорию с одним объектом.
9. Категория $\mathcal{T}op$ ($\mathcal{T}op_*$) топологических пространств (с отмеченной точкой).

Морфизм $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ называется изоморфизмом, если существует $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, такой что $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Морфизм в себя называется эндоморфизмом, множество эндоморфизмов объекта X обозначается $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Эндоморфизм, являющийся изоморфизмом, называется автоморфизмом. Множество автоморфизмов обозначается $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ и, как легко видеть, является группой.

Удобно объекты категории обозначать точками, а морфизмы — стрелками. Есть несколько стандартных способов «размножать» категории.

Примеры 1.3.
1. Если $\mathcal{C}$ — категория, то противоположная категория $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ определяется следующим образом: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Иначе говоря, «обращаются» все стрелки.
2. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а Q — колчан, то есть множество точек (вершин) I, и множество стрелок $A \ni \alpha : t(\alpha) \to h(\alpha)$. Категория $\mathcal{C}^Q$ представлений колчана Q в категории $\mathcal{C}$, определяется так:
$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^Q) &= \{ M_\bullet = (M_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ i \in I,\ m_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_{t(\alpha)}, M_{h(\alpha)}),\ \alpha \in A) \} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^Q}(M_\bullet, N_\bullet) &= \{ f_\bullet = (f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_i, N_i))_{i \in I} \mid \forall \alpha \in A\ n_\alpha \circ f_{t(\alpha)} = f_{h(\alpha)} \circ m_\alpha \}. \end{aligned}$$
3. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а G — группа. Определим $\mathcal{C}^G$ — категорию G-объектов в категории $\mathcal{C}$ — так:
$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^G) &= \{ (X, a) \mid X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}r}(G, \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)) \}, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^G}((X, a), (Y, b)) &= \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid \forall g \in G\ b(g) \circ f = f \circ a(g) \}. \end{aligned}$$
4. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — категории. Определим категорию $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ так:
$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = \{ M = (M_1, M_2) \mid M_i \in \mathcal{C}_i \}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}(M, N) = \{ (f_1, f_2) \mid f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(M_i, N_i) \}$.

Замечание 1.4. Ясно, что $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Категория $\mathcal{C}'$ называется подкатегорией категории $\mathcal{C}$, если $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{C}'$, и тождественный морфизм и композиция морфизмов в категории $\mathcal{C}'$ совпадает с тождественным морфизмом и композицией морфизмов в категории $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{C}'$ называется полной, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для всех $X, Y \in \mathcal{C}'$. Со всяким множеством объектов категории $\mathcal{C}$ можно связать полную подкатегорию, ими образуемую.

Пример 1.5. $\mathcal{A}b \subset \mathcal{G}r$, $\mathcal{F}ields \subset \mathcal{C}omm \subset \mathcal{R}ings$ — полные подкатегории.

Часть 2. Универсальные объекты

Объект X в категории $\mathcal{C}$ называется **универсальным притягивающим**, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ состоит ровно из одного элемента для всех $Y \in \mathcal{C}$. Аналогично, объект X в категории $\mathcal{C}$ называется **универсальным отталкивающим**, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ состоит ровно из одного элемента для всех $Y \in \mathcal{C}$.

Примеры 2.1. 1. Точка является универсальным притягивающим, а пустое множество — универсальным отталкивающим объектом в категории $\mathcal{S}ets$.

2. $\{1\}$ является универсальным притягивающим и отталкивающим объектом в категории $\mathcal{G}r$.
3. $\{0\}$ является универсальным притягивающим и отталкивающим объектом в категории Vect_K.
4. $\mathbb{Z}$ — универсальный отталкивающий объект в категории $\mathcal{R}ings$.
5. Простое поле — универсальный отталкивающий объект в категории $\mathcal{F}ields_p$ полей характеристики p.

Следствие 2.2. *Если универсальный объект в категории $\mathcal{C}$ существует, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма.*

Доказательство: Если X и X' — универсальные отталкивающие объекты, то $\mathrm{Hom}(X,X')$ и $\mathrm{Hom}(X',X)$ состоят ровно из одного элемента, скажем f и f'. Кроме того, $\mathrm{Hom}(X,X)$ и $\mathrm{Hom}(X',X')$ тоже состоят ровно из одного элемента, значит $f' \circ f = \mathrm{Id}_X$ и $f \circ f' = \mathrm{Id}_{X'}$. □

Тем самым, если некий объект определяется «универсальным» свойством, то он однозначно определен, если существует.

Примеры 2.3. 1. Произведение. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим категорию троек (Z,f,g), где $Z \in \mathcal{C}$, $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$, в которой морфизмы $(Z',f',g') \to (Z,f,g)$ — это морфизмы $\phi : Z' \to Z$, такие что $f' = f \circ \phi$, $g' = g \circ \phi$. Универсальный притягивающий объект в этой категории называется **произведением** $X \times Y$.

2. Копроизведение. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим категорию троек (Z,f,g), где $Z \in \mathcal{C}$, $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$, в которой морфизмы $(Z,f,g) \to (Z',f',g')$ — это морфизмы $\phi : Z \to Z'$, такие что $f' = \phi \circ f$, $g' = \phi \circ g$. Универсальный отталкивающий объект в этой категории называется **копроизведением** $X \sqcup Y$.
3. Свободная группа. Пусть $S \in \mathcal{S}ets$. Рассмотрим категорию пар (G,f), где $G \in \mathcal{G}r$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}ets}(S,G)$, в которой морфизмы $(G,f) \to (G',f')$ — это морфизмы $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}r}(G,G')$, такие что $f' = \phi \circ f$. Универсальный отталкивающий объект в этой категории называется **свободной группой**, порожденной множеством S. Заменяя в определении свободной группы категорию $\mathcal{G}r$ на категорию $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ings$, $\mathcal{C}omm$, A-Mod, ..., получаем определение свободной абелевой группы, свободного кольца, свободного коммутативного кольца, свободного A-модуля, ...

Еще раз подчеркнем, что всякий раз когда мы определяем объект с помощью универсального свойства, возникает вопрос о его существовании. И этот вопрос не всегда имеет положительный ответ! Тут нужна осторожность. В качестве иллюстрации докажем:

Теорема 2.4. *Свободные группы существуют.*

Доказательство: для каждого элемента $s \in S$ введем «буквы» a_s и b_s. Пусть $\widetilde{F}$ — моноид всех «слов», состоящих из этих букв, с операцией $\tilde{\circ}$ «приписывания» слов. Обозначим через 1 — «пустое» слово, тогда 1 — единица. Пусть $\sim$ — минимальное отношение эквивалентности на моноиде $\widetilde{F}$, содержащее все «элементарные» эквивалентности $a_s b_s \sim b_s a_s \sim 1$, и замкнутое относительно приписывания, то есть такое что $w_1 \sim w_2 \Longrightarrow w \tilde{\circ} w_1 \sim w \tilde{\circ} w_2$ и $w_1 \tilde{\circ} w \sim w_2 \tilde{\circ} w$. Пусть $F = \widetilde{F}/\sim$ — множество классов эквивалентности. Тогда операция $\tilde{\circ}$ индуцирует операцию $\circ$ на F. Ясно, что $\circ$ — ассоциативна, так как $\tilde{\circ}$ — ассоциативна. Кроме того, ясно что 1 является единицей в F. Легко видеть, что всякий элемент в F имеет обратный (если элемент представлен словом w, то надо заменить каждую букву a_s на b_s, b_s на a_s, и обратить порядок). Таким образом, F — группа. Далее, сопоставляя всякому элементу $s \in S$ слово a_s, получаем отображение $f : S \to F$. Если же $g : S \to G$ — другое отображение, то строим сначала гомоморфизм моноидов $\tilde{\phi} : \widetilde{F} \to G$, полагая $\tilde{\phi}(a_s) = g(s)$, $\tilde{\phi}(b_s) = g(s)^{-1}$, а затем замечаем, что $\tilde{\phi}$ постоянен на классах эквивалентности, следовательно индуцирует отображение $\phi : F \to G$, которое является гомоморфизмом групп. □

Замечание 2.5. Моноид $\widetilde{F}$ — это свободный моноид, порожденный множеством S.

Часть 3. Функторы

Определение 3.1. Ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — это следующие данные: 1) отображение на объектах $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$; 2) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ отображение на морфизмах $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$, такие что выполняются свойства:

Ф1: : для любого объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеем $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.
Ф2: : для всякой пары морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ имеем $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Аналогично, контравариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — это следующие данные: 1) отображение на объектах $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$; 2) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ отображение на морфизмах $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Y), F(X))$ (меняющее направление стрелок), такие что выполняются свойства:

Ф1′: : для любого объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеем $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.
Ф2′: : для всякой пары морфизмов $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ имеем $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Ясно, что функторы можно компонировать, и что композиция функторов является функтором.

Примеры 3.2.
1. Тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
2. Функтор $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$.
3. Функторы вложения $\mathcal{A}b \to \mathcal{G}r$, $\mathcal{F}ields \to \mathcal{C}omm \to \mathcal{R}ings$.
4. «Забывающие» функторы $\mathcal{G}r, \mathcal{A}b, \mathcal{R}ings, \mathcal{C}omm, \mathcal{F}ields \to \mathcal{S}ets$; A-Mod,Mod-$A$$\to \mathcal{A}b$; $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}$.
5. Функторы ограничения: $\mathcal{C}^Q \to \mathcal{C}^{Q'}$, $\mathcal{C}^G \to \mathcal{C}^{G'}$, где $Q' \subset Q$ — подколчан, а $G' \subset G$ — подгруппа.
6. Функторы проекции $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2$.
7. Фундаментальная группа $\pi_1 : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}r$, и первые гомологии $H_1 : \mathcal{T}op \to \mathcal{A}b$.

Это все примеры ковариантных функторов. Примером контравариантного функтора является «тождественный» функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Лемма 3.3. *Сопоставляя всякому ковариантному функтору $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$ его композицию с «тождественным» функтором $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, получаем биекцию между ковариантными функторами $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}'$ и контравариантными функторами $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.*

Функтор называется строгим (соотв. полным), если он инъективен (соотв. сюръективен) на морфизмах.

Определение 3.4. Пусть $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — ковариантные функторы. Морфизм функторов $\phi : F \to G$ — это набор морфизмов $\phi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), G(X))$, такой что для любого морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ имеем $\phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \phi_X$. Аналогично, определяется морфизм контравариантных функторов.

Примеры 3.5.
1. Тождественный морфизм $\mathrm{Id}_F : F \to F$.
2. Естественное отображение $\pi_1(X,x) \to H_1(X,\mathbb{Z})$ является морфизмом функторов из π_1 в композицию функторов $\mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op \to \mathcal{A}b \to \mathcal{G}r$ (забывание отмеченной точки, вычисление гомологий, вложение).
3. Пусть $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{ (G,N) \mid G \in \mathcal{G}r,\ N \triangleleft G \}$, $\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((G,N),(G',N')) = \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}r}(G,G') \mid f(N) \subset N' \}$. Тогда $(G,N) \mapsto G/N$ — функтор «факторизации» $\mathcal{C} \to \mathcal{G}r$, а канонический морфизм $G \to G/N$ является морфизм функторов из забывающего функтора $(G,N) \to G$ в функтор факторизации.

Вообще, то что мы называли каноническими морфизмами — это в действительности морфизмы функторов.

Ясно, что морфизмы функторов можно компонировать. Соответственно, морфизм функторов $\phi : F \to G$ называется изоморфизмом функторов, если найдется $\psi : G \to F$, такой что $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_G$, $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_F$.

Определение 3.6. Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ называется эквивалентностью, если найдется функтор $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, такой что $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}'} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$ и $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (изоморфизмы функторов). Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ называются в этом случае эквивалентными.

Примеры 3.7.
1. Тождественный функтор является эквивалентностью.
2. Биекция между левыми и правыми действиями группы — это эквивалентность $\mathcal{S}ets^G \to \mathcal{S}ets^{G^{\mathrm{op}}}$.
3. Аналогично для колец имеем эквивалентности A-Mod $\to$ Mod-A^{op}, Mod-$A \to A^{\mathrm{op}}$-Mod.
4. Пусть L/K — расширение Галуа. Тогда сопоставления $F \to \mathrm{Gal}(L/F)$, $H \to L^H$ задают контравариантную эквивалентность категории всех промежуточных полей $K \subset F \subset L$ (морфизмы — вложения), и категории всех подгрупп $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ (морфизмы — вложения).