Часть 1. Двойственность

Пусть V — векторное пространство над полем K.

Определение 1.1. Векторное пространство $\mathrm{Hom}(V, K)$ линейных функций $V \to K$ называется двойственным к V и обозначается V^*. Его элементы называются функционалами на V.

Пусть $f : U \to V$ — линейное отображение векторных пространств. Сопоставляя функционалу $\xi \in V^*$ функционал $\xi \circ f \in U^*$ (то есть $(\xi \circ f)(u) = \xi(f(u))$) получаем отображение $V^* \to U^*$, которое обозначается f^* (или f^T) и называется двойственным (или сопряженным) к f.

Лемма 1.2. *Отображение $V \mapsto V^*$, $f \mapsto f^*$ является контравариантным функтором $\mathrm{Vect}_K \to \mathrm{Vect}_K$.*

Доказательство: во-первых, ясно, что f^* — линейно: $f^*(\xi+\lambda\xi') = (\xi+\lambda\xi')\circ f = \xi\circ f+\lambda\xi'\circ f = f^*(\xi)+\lambda f^*(\xi')$. Далее, легко видеть, что если $f = \mathrm{Id}_V$, то $f^*(\xi) = \xi \circ f = \xi \circ \mathrm{Id}_V = \xi$, поэтому $f^* = \mathrm{Id}_{V^*}$. Наконец, $(g \circ f)^*(\xi) = \xi \circ (g \circ f) = (\xi \circ g) \circ f = g^*(\xi) \circ f = f^*(g^*(\xi)) = (f^* \circ g^*)(\xi)$. □

Лемма 1.3. *Двойственность — аддитивный функтор, то есть существуют канонические (функториальные) изоморфизмы $(V_1 \oplus V_2)^* \cong V_1^* \oplus V_2^*$.*

Доказательство: если $\xi \in (V_1 \oplus V_2)^*$, то $\xi_{|V_1} \in V_1^*$ и $\xi_{|V_2} \in V_2^*$. Рассмотрим отображение $(V_1 \oplus V_2)^* \to V_1^* \oplus V_2^*$, $\xi \mapsto (\xi_{|V_1}, \xi_{|V_2})$. Легко видеть, что оно инъективно, сюръективно и функториально. □

Зафиксируем $v \in V$ и рассмотрим $f(v)$ как функцию от $f \in V^*$. Ясно, что она линейная по f. Тем самым, каждому вектору $v \in V$ мы сопоставили функционал на пространстве V^*, то есть построили отображение $\phi = \phi_V : V \to V^{**}$. Имеем по определению $(\phi_V(v))(\xi) = \xi(v)$, следовательно ϕ_V — линейное отображение.

Лемма 1.4. *Набор отображений ϕ_V является инъективным морфизмом функторов $\mathrm{Id} \to **$.*

Доказательство: мы должны проверить, что $f^{**} \circ \phi_U = \phi_V \circ f$ для любого линейного отображения $f : U \to V$. Действительно, возьмем произвольный $u \in U$ и $\xi \in V^*$. Тогда

$$((\phi_V \circ f)(u))(\xi) = (\phi_V(f(u)))(\xi) = \xi(f(u)) \qquad \text{и}$$
$$((f^{**} \circ \phi_U)(u))(\xi) = (f^{**}(\phi_U(u)))(\xi) = (\phi_U(u) \circ f^*)(\xi) = \phi_U(u)(f^*(\xi)) = \phi_U(u)(\xi \circ f) = (\xi \circ f)(u) = \xi(f(u)).$$

Остается заметить, что если $\phi_V(v) = 0$, то $0 = (\phi_V(v))(\xi) = \xi(v)$ для любого $\xi \in V^*$, значит $v = 0$. □

Выберем базис $\{ e_i \}$ в векторном пространстве V и определим функционал $\xi^i \in V^*$ формулой $\xi^i(e_j) = \delta^i_j$.

Лемма 1.5. *Функционалы ξ^i линейно независимы, а если V конечномерно, то ξ^i образуют базис в V^*.*

Доказательство: если $\sum \lambda_i \xi^i = 0$, то $0 = (\sum \lambda_i \xi^i)(e_j) = \lambda_j$ при всех j. Если $\dim V < \infty$, то для произвольных $\xi \in V^*$ и $v = \sum x^j e_j$ имеем $\xi(v) = \xi(\sum x^j e_j) = \sum \xi(e_j) x^j = \sum \xi(e_j)\xi^j(v)$, значит $\xi = \sum \xi(e_j)\xi^j$. Конечномерность здесь нужна для того, чтобы в разложении ξ по ξ^j получилось конечное число слагаемых. □

Базир $\{ \xi^i \}$ пространства V^* называется двойственным по отношению к базису $\{ e_i \}$ в пространстве V.

Следствие 1.6. *Если $\dim V < \infty$, то $V^* \cong V$ (не канонически).*

Следствие 1.7. *Если $\dim V < \infty$, то морфизм $\phi_V : V \to V^{**}$ является изоморфизмом (каноническим).*

Доказательство: ϕ_V инъективно, поэтому остается заметить, что $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. □

Замечание 1.8. Конечномерность очень существенна: если, например, V — счетномерно, то базис в V^* уже континуальный, поэтому ни V^*, ни, тем более, V^{**} не изоморфны V.

Следствие 1.9. *Двойственность является контравариантной аддитивной автоэквивалентностью категории Vect_K^{fd} конечномерных векторных пространств над полем K.*

Часть 2. Тензорное произведение

Пусть U, V и W — векторные пространства над полем K. Отображение $f : U \times V \to W$ называется K-билинейным, если $f(u+\lambda u', v) = f(u,v) + \lambda f(u', v)$, $f(u, v+\lambda v') = f(u,v) + \lambda f(u, v')$ для всех $\lambda \in K$.

Определение 2.1. Тензорным произведением K-векторных пространств U и V называется универсальный отталкивающий объект в категории K-билинейных отображений $U \times V \to W$.

Теорема 2.2. *Тензорное произведение существует.*

Доказательство: построим тензорное произведение явно. Пусть M — векторное пространство с базисом, состоящим из всех пар (u,v), $u \in U$, $v \in V$. Пусть N — подпространство в M, порожденное всеми элементами вида $(u+\lambda u', v) - (u,v) - \lambda(u', v)$, $(u, v+\lambda v') - (u,v) - \lambda(u, v')$. Рассмотрим отображение $f_0 : U \times V \to M/N$ — композицию естественного вложения $U \times V \to M$ и канонической проекции $M \to M/N$. Отображение f_0 билинейно по построению N. Докажем, что оно является универсальным отталкивающим объектом. Пусть $f : U \times V \to W$ — произвольное билинейное отображение. Зададим отображение $\tilde{\phi} : M \to W$ на базисных векторах формулой $\tilde{\phi}(u,v) = f(u,v)$. Тогда $\tilde{\phi}(N) = 0$ в силу билинейности f. Поэтому $\tilde{\phi}$ пропускается через M/N, то есть индуцирует морфизм $\phi : M/N \to W$. Ясно, что $\phi \circ f_0 = f$, и что морфизм ϕ — единственный удовлетворяет такому свойству (так как M/N порождается образом $U \times V$ относительно f_0). $\square$

Тензорное произведение пространств U и V обозначается $U \otimes V$. Его элементы называются тензорами. Образы элементов $(u,v) \in U \times V$ относительно канонического морфизма $U \times V \to U \otimes V$ обозначаются $u \otimes v$ и называются разложимыми тензорами. Ясно, что всякий элемент в $U \otimes V$ представляется как линейная комбинация разложимых тензоров. Более того, в силу билинейности отображения $U \times V \to U \otimes V$ имеем $(u+\lambda u') \otimes v = u \otimes v + \lambda u' \otimes v$, $u \otimes (v + \lambda v') = u \otimes v + \lambda u \otimes v'$.

Лемма 2.3. *Если $\{ u_i \}$ — базис в U, а $\{ v_j \}$ — базис в V, то $\{ u_i \otimes v_j \}$ — базис в $U \otimes V$.*

Доказательство: во-первых, если $u = \sum x^i u_i$, $v = \sum y^j v_j$, то $u \otimes v = (\sum x^i u_i) \otimes (\sum y^j v_j) = \sum x^i y^j u_i \otimes v_j$, значит все разложимые (а значит и вообще все) тензоры представимы в виде линейной комбинации тензоров $u_i \otimes v_j$. Остается проверить их линейную независимость. Предположим, что $\sum a^{ij} u_i \otimes v_j = 0$. Рассмотрим отображение $f^{pq} : U \times V \to K$, заданное формулой $f^{pq}(\sum x^i u_i, \sum y^j v_j) = x^p y^q$. Легко видеть, что f^{pq} билинейно, значит пропускается через морфизм $\phi^{pq} : U \otimes V \to K$. Ясно, что $\phi^{pq}(u_i \otimes v_j) = f^{pq}(u_i, v_j) = \delta^p_i \delta^q_j$, поэтому $a^{pq} = \phi^{pq}(\sum a^{ij} u_i \otimes v_j) = 0$. $\square$

Следствие 2.4. $\dim(U \otimes V) = (\dim U)(\dim V)$.

Пусть $f : U \to U'$ и $g : V \to V'$ — линейные отображения. Легко видеть, что отображение $U \times V \to U' \otimes V'$, $(u,v) \mapsto f(u) \otimes f(v)$ — билинейно, следовательно пропускается через отображение $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$, причем $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$.

Лемма 2.5. *Тензорное произведения является аддитивным бифунктором, то есть существуют канонические изоморфизмы $(U_1 \oplus U_2) \otimes V \cong (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V)$, и $U \otimes (V_1 \oplus V_2) \cong (U \otimes V_1) \oplus (U \otimes V_2)$.*

Доказательство: функториальность очевидна, проверим аддитивность. Легко видеть, что отображение $(U_1 \oplus U_2) \times V \to (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V)$, $((u_1 \oplus u_2), v) \mapsto (u_1 \otimes v) \oplus (u_2 \otimes v)$ — билинейно, следовательно пропускается через отображение $(U_1 \oplus U_2) \otimes V \to (U_1 \otimes V) \oplus (U_2 \otimes V)$, которое очевидно является изоморфизмом. $\square$

Часть 3. Тензоры и двойственность

Лемма 3.1. *Если U — конечномерно, то* $\operatorname{Hom}(U,V) \cong U^* \otimes V$.

Доказательство: для всяких $\xi \in U^*$, $v \in V$ отображение $U \to V$, $u \mapsto \xi(u)v$ — линейно. Обозначим его через $\xi \otimes v$. Легко видеть, что отображение $U^* \times V \to \operatorname{Hom}(U,V)$, $(\xi, v) \mapsto \xi \otimes v$ — билинейно, следовательно пропускается через отображение $U^* \otimes V \to \operatorname{Hom}(U,V)$. Выберем базисы $\{ u_i \}$ и $\{ v_j \}$ в U и V. Если U конечномерно, то рассмотрим также и двойственный базис $\{ \xi^i \}$ в U^*. Тогда $\{ \xi^i \otimes v_j \}$ — базис в $U^* \otimes V$. Ясно, что $\sum a^j_i \xi^i \otimes v_j$ переходит в отображение $f : U \to V$, такое что $f(u_i) = a^j_i v_j$. Поэтому $f = 0$ влечет $a^j_i = 0$ при всех i, j, что доказывает инъективность. Пусть теперь $f : U \to V$ — произвольное линейное отображение. Положим $f(e_i) = a_i^j v_j$. Ясно, что лишь конечное число a_i^j отлично от нуля, поэтому $f = \sum a_i^j \xi^i \otimes v_j$, что доказывает сюръективность. $\square$

Теорема 3.2. *Имеем канонический изоморфизм* $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \cong \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$.

Доказательство: всякому линейному отображению $f : U \to \mathrm{Hom}(V, W)$ сопоставим отображение $U \times V \to W$, $(u, v) \mapsto f(u)(v)$. Оно очевидно билинейно, и, следовательно, пропускается через линейное отображение $\bar{f} : U \otimes V \to W$, причем $\bar{f}(u \otimes v) = f(u)(v)$. Ясно, что отображение $f \mapsto \bar{f}$ линейно. Обратно, если $g : U \otimes V \to W$ — линейное отображение. Тогда для всякого $u \in U$ отображение $g_u(v) = g(u \otimes v)$ является линейным отображением $V \to W$. Сопоставляя всякому $u \in U$ отображение $g_u \in \mathrm{Hom}(V, W)$, получаем отображение $\hat{g} : U \to \mathrm{Hom}(V, W)$, которое очевидно линейно. Наконец, легко видеть, что отображения $f \mapsto \bar{f}$ и $g \mapsto \hat{g}$ являются взаимно обратными и функториальными. $\square$

Часть 4. Двойственность и тензорное произведение над кольцом

Пусть теперь A — произвольное кольцо, а U, V, W, ... — A-модули. Определим двойственный модуль V^* как $\mathrm{Hom}_A(V, A)$. Если V — левый A-модуль, то V^* — правый A-модуль (структура A-модуля на V^* задается правилом $(\xi a)(v) = \xi(v)a$), а если V — правый A-модуль, то V^* — левый A-модуль ($(a\xi)(v) := a\xi(v)$).

Аналогично случаю векторных пространств определяется сопряженный гомоморфизм f^*. При этом легко видеть, что он является гомоморфизмом A-модулей.

Лемма 4.1. *Двойственность является аддитивным контравариантным функтором* A-Mod $\to$ Mod-A *и* Mod-$A \to A$-Mod.

Доказательство: аналогично доказательству лемм 1.2 и 1.3. $\square$

Аналогично случаю векторных пространств определяется и морфизм функторов $\phi : \mathrm{Id} \to **$ (см. 1.4), однако он уже не является инъективным — пример приводится в упражнениях. Утверждение леммы 1.5 точно так же доказывается для свободных A-модулей конечного ранга, но для произвольных A-модулей оно уже неверно. А следствие 1.6 для некоммутативных колец вообще не имеет смысла.

Что касается следствия 1.7, то тут ситуация такая. A-модуль V называется рефлексивным, если канонический морфизм $V \to V^{**}$ является изоморфизмом. Легко видно, что свободный A-модуль конечного ранга рефлексивен, но обратное, вообще говоря, неверно. Соответственно, следствие 1.9 тоже неверно, однако ему можно придать иной смысл, так что оно станет верным, но это уже область применения гомологической алгебры, которую мы оставим в стороне.

Пусть теперь кольцо A — коммутативно. Тензорным произведением A-модулей U и V называется универсальный отталкивающий объект в категории A-билинейных отображений $U \times V \to W$. Тензорное произведение A-модулей U и V обозначается $U \otimes_A V$. Существование тензорного произведения, а также его функториальность и аддитивность доказываются также, как и для векторных пространств. Более того, если A-модули U и V свободны, то аналогично лемме 2.3 доказывается, что $U \otimes_A V$ свободен, а его ранг равен произведению рангов модулей U и V. Наконец, тем же способом доказывается, что теорема 3.2 выполняется для любых A-модулей над коммутативным кольцом A, а лемма 3.1 — только если U — свободный A-модуль.

Часто полезной оказывается следующая лемма (докажите ее!).

Лемма 4.2. *Пусть A — подкольцо в коммутативном кольце B, а U и V — произвольные B-модули. Тогда* $U \otimes_B V \cong U \otimes_A V / \langle ub \otimes v - u \otimes bv \rangle_{u \in U, v \in V, b \in B}$ *где* $\langle \dots \rangle$ *— обозначает A-подмодуль, порожденный всеми элементами указанного вида.*

Замечание 4.3. Если кольцо B — некоммутативно, то можно определить тензорное произведение правого B-модуля U на левый B-модуль V с помощью формулы из предыдущей леммы (взяв $A = \mathbb{Z}$). Однако, такое произведение уже не будет B-модулем, а будет лишь абелевой группой. Тем не менее, лемма 3.1 по прежнему выполняется, если U и V — левые B-модули, причем U — свободен.