Часть 1. Билинейные формы

Пусть U и V — векторные пространства над полем K.

Определение 1.1. Билинейная форма на $U \times V$ — это K-билинейное отображение $g : U \times V \to K$, то есть отображение, удовлетворяющее условиям $g(u + \lambda u', v) = g(u, v) + \lambda g(u', v)$, $g(u, v + \lambda v') = g(u, v) + \lambda g(u, v')$ для всех $\lambda \in K$.

Примеры 1.2.
1. $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$ — билинейная форма на $K^n \times K^n$.
2. Отображение вычисления $\mathrm{ev} : V^* \times V \to K$, $\mathrm{ev}(\xi, v) = \xi(v)$ — билинейная форма.
3. Отображение $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ — билинейная форма $\mathrm{Mat}_{n,m}(K) \times \mathrm{Mat}_{m,n}(K) \to K$.
4. $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ — билинейная форма $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$.
5. $\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_{2i}y_{2i+1} - x_{2i+1}y_{2i})$ — билинейная форма $K^{2n} \times K^{2n} \to K$.

Согласно результатам предыдущей лекции, всякая билинейная форма представляется линейным отображением $U \otimes V \to K$, то есть элементом пространства $(U \otimes V)^*$.

Пусть $\{ u_i \}$ — базис в U, а $\{ v_j \}$ — базис в V. Матрица $G = (g_{ij})$, $g_{ij} := g(u_i, v_j)$ называется матрицей Грама билинейной формы g относительно базисов $\{ u_i \}$ и $\{ v_j \}$. Ясно, что всякая билинейная форма однозначно определяется своей матрицей Грама: $g(X, Y) = g(\sum x_i u_i, \sum y_j v_j) = \sum g(u_i, v_j)x_i y_j = \sum g_{ij} x_i y_j = X^T GY$.

Лемма 1.3. *Пусть $\{ u'_i \}$ и $\{ v'_j \}$ — новые базисы с матрицами перехода A и B соответственно. Тогда матрица Грама формы g в новых базисах равна $G' = A^T GB$.*

Доказательство: $g(u'_i, v'_j) = g(\sum a_{pi} u_p, \sum b_{qj} v_q) = \sum a_{pi} g_{pq} b_{qj}$. □

Лемма 1.4. *Имеем изоморфизмы* $\mathrm{Hom}(U \otimes V, K) \cong \mathrm{Hom}(U, V^*) \cong \mathrm{Hom}(V, U^*)$.

Доказательство: сопоставим форме $g : U \times V \to K$ отображения $g_L : V \to U^*$ и $g_R : U \to V^*$, заданные формулами $(g_L(v))(u) = g(u, v)$, $(g_R(u))(v) = g(u, v)$. Эти же формулы показывают, как по отображениям восстановить билинейную форму. □

Будем называть отображения $g_L : V \to U^*$ и $g_R : U \to V^*$, соответствующие билинейной форме g, левой и правой частичными дуализациями формы g. Ясно, что матрица Грама формы g совпадает с матрицей левой дуализации $g_L : V \to U^*$, записанной относительно базиса $\{ v_i \}$ в V и двойственного базиса $\{ u^i \}$ в U^* (если $\dim U < \infty$), и транспонирована по отношению к матрице правой дуализации $g_R : U \to V^*$, записанной относительно базиса $\{ u_i \}$ в V и двойственного базиса $\{ v^i \}$ в V^* (если $\dim V < \infty$).

Определение 1.5. Левым ядром формы $g : U \otimes V \to K$ называется ${}^\perp V := \{ u \in U \mid \forall v \in V \; g(u, v) = 0 \}$. Аналогично, правым ядром формы g называется $U^\perp := \{ v \in V \mid \forall u \in U \; g(u, v) = 0 \}$. Форма g называется невырожденной, если ${}^\perp V = U^\perp = 0$.

Лемма 1.6. *Имеем* ${}^\perp V = \mathrm{Ker}\, g_R$, $U^\perp = \mathrm{Ker}\, g_L$.

Следствие 1.7. *Если $g : U \otimes V \to K$ — невырожденная форма, и одно из пространств U, V конечномерно, то $\dim U = \dim V$ и частичные дуализации формы g задают изоморфизмы $U \cong V^*$, $V \cong U^*$.*

Докзательство: пусть, например, $\dim U < \infty$. Так как $U^\perp = 0$, то $g_L : V \to U^*$ — вложение, значит $\dim V \leqslant \dim U^* = \dim U$. В частности, $\dim V < \infty$. Аналогично, из ${}^\perp V = 0$ следует, что $g_R : U \to V^*$ — вложение, значит $\dim U \leqslant \dim V^* = \dim V$. Таким образом, $\dim U = \dim V < \infty$, и частичные дуализации, будучи вложениями пространств одинаковой конечной размерности, обязаны являться изоморфизмами. □

Следствие 1.8. *Если $\dim U, \dim V < \infty$, то форма g невырождена $\iff$ матрица Грама формы g невырождена.*

Замечание 1.9. Конечномерность существенна: в примере 1.2.4 форма невырождена, однако, можно показать, что $\dim(\mathbb{R}[x])^* > \dim \mathbb{R}[x]$.

Лемма 1.10. *Всякая форма* $g : U \otimes V \to K$ *индуцирует невырожденную форму* $\bar{g} : (U/{}^{\perp}V) \otimes (V/U^{\perp}) \to K$.

Доказательство: ясно, что $g(u, v)$ не изменится, если к u прибавить любой элемент из ${}^{\perp}V$, а к v — любой элемент из $U^{\perp}$. Значит, форма g индуцирует форму $\bar{g}$. Если $\bar{u} \in U/{}^{\perp}V$ — элемент в левом ядре формы $\bar{g}$, то $\bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ для всех $\bar{v} \in V/U^{\perp}$, значит $g(u, v) = 0$ для всех $v \in V$, значит $u \in {}^{\perp}V$ и $\bar{u} = 0$, то есть левое ядро равно нулю. Аналогично доказывается тривиальность правого ядра формы $\bar{g}$. □

Определение 1.11. Пусть $g : U \otimes V \to K$ — билинейная форма, а $U_1 \subset U$, $V_1 \subset V$ — подпространства. Левым ортогоналом подпространства V_1 относительно формы g называется ${}^{\perp}V_1 := \{u \in U \mid \forall v \in V_1\ g(u, v) = 0\}$. Аналогично, правым ортогоналом подпространства U_1 называется $U_1^{\perp} := \{ v \in V \mid \forall u \in U_1\ g(u, v) = 0 \}$.

Лемма 1.12. *Если* $\dim U = \dim V = n$, *то* $\dim U_1^{\perp} \geqslant n - \dim U_1$, $\dim {}^{\perp}V_1 \geqslant n - \dim V_1$. *Если же* g *невырождена, то неравенства становятся равенствами.*

Доказательство: рассмотрим индуцированную форму $U_1 \otimes V \to K$. Ясно, что ее левое ядро равно $U_1 \cap {}^{\perp}V$, а правое равно как раз $U_1^{\perp} \subset V$. Поэтому индуцированная форма $(U_1/(U_1 \cap {}^{\perp}V)) \otimes (V/U_1^{\perp}) \to K$ невырождена и $\dim U_1^{\perp} = \dim V - \dim(V/U_1^{\perp}) = n - \dim(U_1/(U_1 \cap {}^{\perp}V)) \geqslant n - \dim U_1$. □

Лемма 1.13. *Если форма* g *невырождена,* $\dim U = \dim V < \infty$, *то* ${}^{\perp}(U_1^{\perp}) = U_1$, $({}^{\perp}V_1)^{\perp} = V_1$.

Доказательство: ясно, что $U_1 \subset {}^{\perp}(U_1^{\perp})$. Кроме того, $\dim({}^{\perp}(U_1^{\perp})) = n - \dim U_1^{\perp} = n - (n - \dim U_1) = \dim U_1$. □

Пусть V — векторное пространство, а $V_1 \subset V$ — подпространство. Аннулятором пространства V_1 называется ${}^{\perp}V_1$ ортогонал к V_1 относительно билинейной формы $\mathrm{ev} : V^* \otimes V \to K$. Аналогично определятся аннулятор подпространства $U_1 \subset V^*$. Из предыдущих утверждений следует, что если V конечномерно, то аннулятор аннулятора совпадает с исходным подпространством.

Часть 2. Симметрические и знакопеременные формы

Билинейные формы $V \otimes V \to K$ называются также билинейными формами на пространстве V. Ясно, что для представления такой формы матрицей достаточно выбрать один базис в V, а при замене базиса матрица Грама формы меняется по правилу $G \mapsto A^T G A$, где A — матрица перехода.

Лемма 2.1. *Если* $\dim V < \infty$, *а* $V_1 \subset V$ — *подпространство, т.ч.* $g_{|V_1}$ *невырожденна, то* $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$.

Доказательство: во-первых, легко видеть что пространство $V_1 \cap V_1^{\perp}$ является правым ядром формы $g_{|V_1}$, поэтому $V_1 \cap V_1^{\perp} = 0$, а во-вторых, $\dim V_1^{\perp} \geqslant \dim V - \dim V_1$ по лемме 1.12. □

Определение 2.2. Билинейная форма на пространстве V называется симметрической, если $\forall v, v' \in V$ имеем $g(v, v') = g(v', v)$, и знакопеременной, если $\forall v \in V$ имеем $g(v, v) = 0$.

Замечание 2.3. Из знакопеременности следует кососимметричность $g(v, v') = -g(v', v)$ $\forall v, v' \in V$: действительно $0 = g(v + v', v + v') - g(v, v) - g(v', v') = g(v, v') + g(v', v)$. Если же $\operatorname{char} K \neq 2$, то условия знакопеременности и кососимметричности эквивалентны: $g(v, v) = -g(v, v)$, значит $g(v, v) = 0$.

Лемма 2.4. *Пусть* G — *матрица Грама формы* g *относительно некоторого базиса. Тогда*
(i) g — *симметрическая* $\iff G^T = G$; *(ii)* g — *кососимметрическая* $\iff G^T = -G$; *(iii)* g — *знакопеременная* $\iff G^T = -G$, *и* G *имеет нули на диагонали (второе условие нужно только при* $\operatorname{char} K = 2$).

Доказательство: (i) и (ii) $g(Y, X) = Y^T G X = (Y^T G X)^T = X^T G^T Y$, $g(X, Y) = X^T G Y$.

$(iii) \Longrightarrow)$ имеем $0 = g(v_i, v_i) = g_{ii}$, и $0 = g(v_i + v_j, v_i + v_j) - g(v_i, v_i) - g(v_j, v_j) = g(v_i, v_j) + g(v_j, v_i) = g_{ij} + g_{ji}$.
$\Longleftarrow)$ $g(\sum x_i v_i, \sum x_i v_i) = \sum x_i^2 g_{i,i} + \sum_{i<j} x_i x_j (g_{ij} + g_{ji})$. □

Следствие 2.5. *Если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то всякая билинейная форма над* K *однозначно раскладывается в сумму симметрической и знакопеременной формы.*

Доказательство: положим $g_+(v, v') = \frac{1}{2}(g(v, v') + g(v', v))$, $g_-(v, v') = \frac{1}{2}(g(v, v') - g(v', v))$. □

Очень удобным свойством симметрических и знакопеременных форм является

Лемма 2.6. *Если форма g симметрична или знакопеременна и $V_1 \subset V$, то $V_1^{\perp} = {}^{\perp}V_1$.*

Теорема 2.7. *Если $\operatorname{char} K \neq 2$, то всякая симметрическая форма над K приводится к диагональному виду.*

Доказательство: если $g(v,v) = 0$ для всех $v \in V$, то g знакопеременна, значит $g = 0$ и матрица Грама формы g диагональна. Если найдется $v \in V$, такой что $g(v,v) \neq 0$, то $V = Kv \perp v^{\perp}$ — ортогональная прямая сумма. Выбирая базис в $v^{\perp}$, в котором $g_{|v^{\perp}}$ диагональна, и дополняя его вектором v, получаем искомый базис. □

Теорема 2.8. *Всякая знакопеременная форма приводится к блочно-диагональному виду с блоками вида $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и (0) на диагонали.*

Доказательство: если $g = 0$, то любой базис годится. Иначе, найдем пару векторов $v_1, v_2 \in V$, так что $g(v_1, v_2) = 1$. Ясно, что v_1 и v_2 линейно независимы. Пусть $V_{12} = Kv_1 \oplus Kv_2$. Ясно, что $g_{|V_{12}}$ имеет в базисе $\{ v_1, v_2 \}$ матрицу Грама I_2. В частности, $g_{|V_{12}}$ невырождена, поэтому $V = V_{12} \perp V_{12}^{\perp}$ — ортогональная прямая сумма. Выбирая базис в $V_{12}^{\perp}$, в котором $g_{|V_{12}^{\perp}}$ имеет искомый вид, и дополняя его векторами v_1, v_2, получаем искомый базис. □

Следствие 2.9. *Если g — невырожденная знакопеременная форма на пространстве V, то $\dim V$ — четна.*

Часть 3. Антилинейность, полуторалинейность и эрмитовость

Определение 3.1. Отображение $f : V \to W$ векторных пространств над полем $\mathbb{C}$ называется антилинейным, если f — $\mathbb{R}$-линейно и $f(zv) = \bar{z}f(v)$. Форма $g : U \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если она $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу, и антилинейна по второму.

Замечание 3.2. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим на V ту же структуру абелевой группы с новым действием поля $\mathbb{C}$: $zv := \bar{z}v$. Тем самым, получаем новое векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, которое обозначается $\bar{V}$ и называется комплексно-сопряженным к V. Ясно, что антилинейное отображение $V \to W$ — то же самое, что линейное отображение $\bar{V} \to W$, а полуторалинейная форма $U \times V \to \mathbb{C}$ — то же самое, что билинейная форма $U \times \bar{V} \to \mathbb{C}$.

Ясно, что результаты первой части лекции с очевидными изменениями переносятся на случай полуторалинейных форм. Отметим только, что если G — матрица Грама формы g, то $g(X,Y) = X^T G \bar{Y}$, при замене базиса матрица Грама полуторалинейной формы меняется по правилу $G \mapsto A^T G \bar{B}$, а частичные дуализации формы g являются антилинейными отображениями $U \to V^*$ и $V \to U^*$.

Определение 3.3. Полуторалинейная форма h на пространстве V называется эрмитовой, если $\forall v, v' \in V$ имеем $h(v,v') = \overline{h(v',v)}$ и косоэрмитовой, если $\forall v, v' \in V$ имеем $h(v,v') = -\overline{h(v',v)}$.

Лемма 3.4. *Пусть H — матрица Грама формы h относительно некоторого базиса. Тогда*
(i) h — эрмитова $\iff H^T = \bar{H}$; (ii) h — косоэрмитова $\iff H^T = -\bar{H}$.

Доказательство: $\overline{h(Y,X)} = \bar{Y}^T \bar{H} X = (\bar{Y}^T \bar{H} X)^T = X^T \bar{H}^T \bar{Y}$. □

Следствие 3.5. *Форма h — косоэрмитова $\iff ih$ — эрмитова.*

Лемма 3.6. *Всякая эрмитова (косоэрмитова) форма над K приводится к диагональному виду.*

Доказательство: пусть h — эрмитова. Если $h(v,v) = 0$ для всех $v \in V$, то для всех $u, v \in V$ и $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$2\operatorname{Re}(zh(u,v)) = h(u, \bar{z}v) + h(\bar{z}v, u) = h(u + \bar{z}v, u + \bar{z}v) - h(u,u) - h(v,v) = 0,$$

значит $h = 0$ и матрица Грама формы h диагональна. Если найдется $v \in V$, такой что $h(v,v) \neq 0$, то $V = Kv \perp v^{\perp}$ — ортогональная прямая сумма. Выбирая базис в $v^{\perp}$, в котором $h_{|v^{\perp}}$ диагональна, и дополняя его вектором v, получаем искомый базис. □

Замечание 3.7. Легко видеть, что теория эрмитовых форм дословно переносится на случай произвольного расширения полей L/K степени 2 с $\operatorname{char} K \neq 2$ (в роли комплексного сопряжения выступает единственный нетривиальный автоморфизм L над K).