Часть 1. Сигнатура

Пусть K — подполе поля $\mathbb{R}$ (например, $K = \mathbb{Q}$ или $K = \mathbb{R}$), V — n-мерное векторное пространство над полем K, а g — симметрическая билинейная форма на V. Выберем базис, в котором матрица Грама формы g диагональна (такой базис называется ортогональным), и обозначим через r_+, r_- и r_0 количество положительных, отрицательных и нулевых чисел на диагонали, так что $r_+ + r_- + r_0 = n$.

Теорема 1.1. *Числа r_+, r_- и r_0 не зависят от выбора ортогонального базиса.*

Доказательство: пусть $\{ e_i \}$ и $\{ f_i \}$ — ортогональные базисы, и обозначим $g(e_i, e_i) = a_i$, $g(f_i, f_i) = b_i$. Пусть, далее $a_1, \dots, a_{r_+} > 0 > a_{r_++1}, \dots, a_{r_++r_-}$, $a_{r_++r_-+1} = \dots = a_n = 0$; $b_1, \dots, b_{s_+} > 0 > b_{s_++1}, \dots, b_{s_++s_-}$, $b_{s_++s_-+1} = \dots = b_n = 0$; Покажем, что векторы $e_1, \dots, e_{r_+}, f_{s_++1}, \dots, f_n$ линейно независимы. Действительно, если $x_1e_1 + \dots x_{r_+}e_{r_+} = y_{s_++1}f_{s_++1} + \dots + y_nf_n$, то применяя к обеим частям равенства форму g получаем $x_1^2a_1 + \dots + x_{r_+}^2a_{r_+} = y_{s_++1}^2b_{s_++1} + \dots + y_n^2b_n$. Легко видеть, что правая часть неположительна, а левая — положительна всегда, за исключением случая $x_1 = \dots = x_{r_+} = 0$. Но тогда и $y_{s_++1} = \dots = y_n = 0$, так как векторы $f_{s_++1}, \dots, f_n$ линейно независимы. Из линейной независимости векторов $e_1, \dots, e_{r_+}, f_{s_++1}, \dots, f_n$ следует неравенство $r_+ + (n - s_+) \leqslant n$, то есть $r_+ \leqslant s_+$. Аналогично доказывается $s_+ \leqslant r_+$. Значит $r_+ = s_+$. Аналогичные рассуждения показывают, что $r_- = s_-$. Наконец, $r_0 = n - r_+ - r_- = n - s_+ - s_- = s_0$. □

Тройка чисел (r_+, r_-, r_0) называется сигнатурой формы g. В случае, если форма g невырождена, имеем $r_0 = 0$ и сигнатурой называют пару чисел (r_+, r_-).

Лемма 1.2. *Для всякой билинейной симметрической формы g над полем $\mathbb{R}$ найдется базис, такой что матрица Грама формы g в этом базисе имеет вид* $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$.

Доказательство: выберем ортогональный базис $\{ e_i \}$ и заменим его на $e_i' = e_i / \sqrt{|g(e_i, e_i)|}$. □

Следствие 1.3. *Билинейные симметрические формы g и g' над полем $\mathbb{R}$ изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их сигнатуры.*

Часть 2. Положительно определенные формы

Определение 2.1. Билинейная симметрическая форма g называется положительно определенной, если $r_- = r_0 = 0$, и отрицательно определенной, если $r_+ = r_0 = 0$.

Лемма 2.2. *Форма g на V положительно* (отрицательно) определена $\Leftrightarrow g(v, v) > 0$ $(g(v, v) < 0)$ $\forall 0 \neq v \in V$.

Доказательство: выберем ортогональный базис $\{ e_i \}$. Если g положительно определена, то $\forall 0 \neq v = \sum x_ie_i$ имеем $g(v, v) = \sum x_i^2 g(e_i, e_i) > 0$, а если $g(v, v) > 0$ для всех $0 \neq v \in V$, то в частности $g(e_i, e_i) > 0$, значит g положительно определена. □

Следствие 2.3. *Если форма g положительно* (отрицательно) определена на V, то g положительно (отрицательно) определена и на любом его подпространстве.

Пусть теперь форма g положительно определена на V.

Следствие 2.4. *Форма $g_{|U}$ невырождена для любого $U \subset V$. В частности, $V = U \oplus U^{\perp}$ для любого $U \subset V$.*

Следствие 2.5. *Для любого подпространства $U \subset V$ и вектора $v \in V$ существуют единственное разложение $v = v' + v''$, такое что $v' \perp U$, $v'' \in U$.*

Вектор v'' называется ортогональной проекцией вектора v на подпространство U.

Лемма 2.6. *Если $u_1, \ldots, u_k$ — ортогональный базис в U, и $v \in V$, то ортогональная проекция v на U равна $\sum_{i=1}^k [(v \cdot u_i)/(u_i \cdot u_i)]u_i$.*

Доказательство: предположим, что $v - \sum a_i u_i \perp U$. Тогда $0 = (v - \sum a_i u_i) \cdot u_j = v \cdot u_j - a_j u_j \cdot u_j$, откуда $a_j = (v \cdot u_j)/(u_j \cdot u_j)$. □

Теорема 2.7. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. Определим векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ индуктивной формулой: $e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1}[(e_k \cdot e'_i)/(e'_i \cdot e'_i)]e'_i$. Тогда $e'_1, \ldots, e'_n$ — ортогональный базис.*

Доказательство: достаточно проверить, что $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$ векторы $e'_1, \ldots, e'_k$ — линейно независимы, $e'_1, \ldots, e'_k$ попарно ортогональны, и $\langle e'_1, \ldots, e'_k \rangle = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. При $k = 1$ все очевидно. Пусть $k > 1$. Если $e'_1, \ldots, e'_k$ линейно зависимы, то $e'_1, \ldots, e'_{k-1}, e_k$ — тоже линейно зависимы. Но так как $e'_1, \ldots, e'_{k-1}$ — линейно независимы, то это означает, что $e_k \in \langle e'_1, \ldots, e'_{k-1} \rangle = \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle$, что противоречит линейной независимости векторов $e_1, \ldots, e_k$. Далее, из леммы 2.6 следует, что $e'_k \cdot e'_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$, значит $e'_1, \ldots, e'_k$ — попарно ортогональны. Наконец, $\langle e'_1, \ldots, e'_k \rangle = \langle \langle e'_1, \ldots, e'_{k-1} \rangle, e_k - \sum a_i e'_i \rangle = \langle \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle, e_k \rangle = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$. □

Описанный в теореме процесс называется ортогонализацией Грама–Шмидта.

Часть 3. Расстояния, углы, объем

Евклидовым пространством называется $\mathbb{R}$-векторное пространство V с положительно определенной формой g на нем. Будем для краткости обозначать $g(u, v)$ через (u, v) или даже $u \cdot v$ и называть скалярным произведением. Определим модуль или длину вектора v формулой $|v| := \sqrt{v^2}$. Заметим, что $|v| = 0 \iff v = 0$.

Всякое евклидово пространство обладает базисом, в котором матрица Грама единична (в частности, евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны). Такой базис называется ортонормированным. В ортонормированном базисе имеем $X \cdot Y = \sum x_i y_i$, $|X| = \sqrt{\sum x_i^2}$.

Лемма 3.1 (Неравенство Шварца). $|v \cdot w| \leqslant |v||w|$, *причем* $|v \cdot w| = |v||w| \iff v$ *и* w *коллинеарны.*

Доказательство: если $|v| = 0$ или $|w| = 0$, то неравенство очевидно. Предположим, что $|v|, |w| \neq 0$ и положим $v' = \frac{1}{|v|}v$, $w' = \frac{1}{|w|}w$, так что $|v'| = |w'| = 1$ и $v' \cdot w' = \frac{1}{|v||w|}v \cdot w$. Заметим, что $\forall t \in K$ имеем $0 \leqslant (v' + tw')^2 = v' \cdot v' + 2tv' \cdot w' + t^2 w' \cdot w' = 1 + 2tv' \cdot w' + t^2$, значит дискриминант — неположителен, то есть $(v' \cdot w')^2 \leqslant 1$, то есть $|v' \cdot w'| \leqslant 1$. Домножая на $|v||w|$ получаем искомое неравенство. Далее, если векторы v и w коллинеарны, то очевидно имеем равенство, а если неколлинеарны, то ясно что $(v' + tw')^2 > 0$, поэтому дискриминант отрицателен и получаем строгое неравенство. □

Следствие 3.2 (Неравенство треугольника). $|v + w| \leqslant |v| + |w|$.

Доказательство: пользуясь неравенством треугольника для вещественных чисел и неравенством Шварца, получаем $(|v+w|)^2 = |(v+w)^2| = |v^2 + 2v \cdot w + w^2| \leqslant |v^2| + 2|v \cdot w| + |w^2| \leqslant |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$. □

Из неравенства треугольника следует, что функция $\rho(v, w) = |v - w|$ является метрикой в пространстве V. Определим угол α между векторами v и w формулой $v \cdot w = |v||w| \cos\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Ясно, что α однозначно определен, за исключением случая $|v| = 0$ или $|w| = 0$.

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — произвольный набор векторов в евклидовом пространстве. Определителем Грама набора векторов $e_1, \ldots, e_k$ называется $\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_k) = \det(e_i \cdot e_j)_{i,j=1}^k$.

Лемма 3.3. *Объем k-мерного параллелепипеда $\{\, v = \sum_{i=1}^k t_i e_i \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1 \,\}$ равен $\sqrt{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_k)}$.*

Доказательство: при $k = 1$ — очевидно. Пусть $k > 1$. Запишем $e_k = e'_k + e''_k$, где $e'_k \perp e_1, \ldots, e_{k-1}$ и $e''_k \in \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle$. Тогда ясно, что высота параллелепипеда равна $|e'_k|$, а площадь основания — $\sqrt{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_{k-1})}$ (по предположению индукции), поэтому объем равен $|e'_k|\sqrt{\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_{k-1})}$. С другой стороны, имеем $e_k \cdot e_k = e'_k \cdot e'_k + e''_k \cdot e''_k$, и $e_k \cdot e_i = e'_k \cdot e_i + e''_k \cdot e_i = e''_k \cdot e_i$, поэтому $\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{G}(e_1, \ldots, e''_k) + |e'_k|^2 \,\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_{k-1})$ и остается заметить, что первый определитель равен нулю так как векторы линейно зависимы. □

Следствие 3.4. *Если A — матрица перехода от ортонормированного базиса к произвольному базису $e_1, \ldots, e_n$, то объем параллелепипеда равен $|\det(A)|$.*

Доказательство: $\mathrm{G}(e_1, \ldots, e_n) = \det(A^T A) = \det(A)^2$. □

Часть 4. Ортогональная группа

Пусть V — векторное пространство над полем K с симметрической билинейной формой g. Оператор $A : V \to V$ называется ортогональным относительно формы g, если $g(Av, Av') = g(v, v')$ для всех $v, v' \in V$.

Лемма 4.1. *Пусть G — матрица Грама формы g, A — матрица оператора A в том же базисе. Оператор A ортогонален $\iff A^T GA = G$.*

Доказательство: $g(AX, AY) = (AX)^T G(AY) = X^T (A^T GA)Y$. □

Лемма 4.2. *Если форма g невырождена, а оператор A ортогонален, то A обратим.*

Доказательство: если $Av = 0$, то $g(v, v') = g(Av, Av') = g(0, Av') = 0$, значит v лежит в ядре формы g. □

Обозначим через $\mathrm{O}(V, g; K)$ множество всех обратимых операторов ортогональных относительно формы g.

Лемма 4.3. *Множество $\mathrm{O}(V, g; K)$ — группа.*

Доказательство: если $A, B \in \mathrm{O}(V, g; K)$, то $g((AB)v, (AB)v') = g(A(Bv), A(Bv')) = g(Bv, Bv') = g(v, v')$, $g(\mathrm{Id}_V\, v, \mathrm{Id}_V\, v') = g(v, v')$, $g(A^{-1}v, A^{-1}v') = g(A(A^{-1}v), A(A^{-1}v')) = g((AA^{-1})v, (AA^{-1})V') = g(v, v')$. □

Лемма 4.4. *Если формы g и h на пространствах V и W изоморфны, то $\mathrm{O}(V, g; K) \cong \mathrm{O}(W, h; K)$.*

Доказательство: пусть $f : V \to W$ — изоморфизм форм. (то есть изоморфизм пространств, такой что $h(fv, fv') = g(v, v')$ для всех $v, v' \in V$). Сопоставляя оператору $A \in \mathrm{O}(W, h)$ оператор $f^{-1}Af$ получаем гомоморфизм групп $\mathrm{O}(W, h) \to \mathrm{O}(V, g)$, так как $g(f^{-1}Afv, f^{-1}Afv') = h(ff^{-1}Afv, ff^{-1}Afv') = h(Afv, Afv') = h(fv, fv') = g(v, v')$. Обратный гомоморфизм задается формулой $B \mapsto fBf^{-1}$. □

Следствие 4.5. *Класс изоморфизма группы $\mathrm{O}(V, g; \mathbb{C})$ зависит только от ранга формы g, а класс изоморфизма группы $\mathrm{O}(V, g; \mathbb{R})$ зависит только от сигнатуры формы g.*

Группа $\mathrm{O}(V, g; K)$ называется ортогональной группой. Ортогональная группа невырожденной формы g на n-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ обозначается $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, а ортогональная группа невырожденной формы g сигнатуры (r_+, r_-) над полем $\mathbb{R}$ обозначается $\mathrm{O}(r_+, r_-; \mathbb{R})$, при этом группа $\mathrm{O}(n, 0; \mathbb{R})$ также обозначается через $\mathrm{O}(n; \mathbb{R})$. Также часто рассматривают специальную ортогональную группу $\mathrm{SO}(n; \mathbb{R})$ ортогональных операторов с определителем 1.

Часть 5. Эрмитовы формы и унитарная группа

Положительная определенность — очень полезное с геометрической (а также, и с алгебраической) точки зрения свойство. Однако, билинейная форма над полем $\mathbb{C}$ не может быть положительно определенной — если $g(v, v) > 0$, то $g(iv, iv) = -g(v, v) < 0$. Тут на выручку приходят эрмитовы формы.

Для эрмитовых форм точно также как и для билинейных над полем $\mathbb{R}$ определяется сигнатура. Эрмитова форма h называется положительно определенной, если $h(v, v) > 0$ для всех $0 \neq v \in V$.

Лемма 5.1. *Если эрмитова форма h положительно определена, то существует базис, в котором матрица Грама формы h — единичная.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.2. Аналогично, легко убедиться, что для положительно определенной эрмитовой метрики выполняется неравенство Шварца и неравенство треугольника. Таким образом, можно заниматься геометрией и в произвольном положительно определенном эрмитовом пространстве. Наконец, оператор A в комплексном векторном пространстве V с эрмитовой формой h называется унитарным, если $h(Av, Av') = h(v, v')$ для всех $v, v' \in V$. В терминах матриц условие унитарности записывается в виде $\bar{A}^T GA = G$. Легко видеть, что если h невырождена, то всякий унитарный оператор обратим и множество $\mathrm{U}(V, h)$ всех унитарных операторов является группой — унитарной группой. Класс изоморфизма унитарной группы зависит только от класса изоморфизма эрмитовой метрики, то есть от ее сигнатуры. Унитарная группа невырожденной эрмитовой формы h сигнатуры (r_+, r_-) обозначается $\mathrm{U}(r_+, r_-)$, при этом группа $\mathrm{U}(n, 0)$ также обозначается через $\mathrm{U}(n)$. Также часто рассматривают специальную унитарную группу $\mathrm{SU}(n; \mathbb{R})$ унитарных операторов с определителем 1.