Часть 1. Формы и операторы

Зафиксируем невырожденную билинейную форму g на конечномерном векторном пространстве V.

Лемма 1.1. *Сопоставляя оператору A форму $B_A(v,v') := g(Av,v')$, получаем изоморфизм между пространством операторов и пространством всех билинейных форм.*

Доказательство: пусть B — билинейная форма. Нам надо построить оператор A, такой что $B = B_A$. Если зафиксировать v, то $B(v,v')$ — линейная функция от v', следовательно $B(v,v') = \xi_v(v')$, где $\xi_v \in V^*$. Так как g невырождена, а V конечномерно, то найдется единственный $\hat{v} \in V$, такой что $g_R(\hat{v}) = \xi_v$, то есть $g(\hat{v},v') = \xi_v(v') = B(v,v')$. Зададим отображение $A : V \to V$ формулой $A(v) = \hat{v}$. По определению имеем равенство $g(A(v),v') = B(v,v')$. Покажем, что A — линейно. Действительно, ясно что $g(A(v_1+\lambda v_2) - A(v_1) - \lambda A(v_2), v') = g(A(v_1+\lambda v_2),v') - g(A(v_1),v') - \lambda g(A(v_2),v') = B(v_1+\lambda v_2, v') - B(v_1,v') - \lambda B(v_2,v') = B((v_1+\lambda v_2) - v_1 - \lambda v_2, v') = B(0,v') = 0$, поэтому в силу невырожденности g имеем $A(v_1+\lambda v_2) = A(v_1) + \lambda A(v_2)$. Таким образом, A — оператор и $B = B_A$. Более того, из предыдущей конструкции видно, что оператор A однозначно определяется формой B. $\square$

Следствие 1.2. *Для всякого оператора $A : V \to V$ существует единственный оператор $A^T : V \to V$, такой что $\forall v,v' \in V$ имеем $g(Av,v') = g(v,A^Tv')$.*

Оператор $A^T : V \to V$ называется оператором, сопряженным (справа) к A относительно формы g.

Замечание 1.3. Воспользовавшись определением оператора A^* и дуализации g_L, определение оператора A^T можно переписать в виде $g_L(A^Tv')(v) = g(v,A^Tv') = g(Av,v') = g_L(v')(Av) = A^*(g_L(v'))(v)$, откуда получаем $g_L \circ A^T = A^* \circ g_L$ и $A^T = g_L^{-1} \circ A^* \circ g_L$.

Следствие 1.4. *Если G — матрица Грама формы g, а A — матрица оператора, то матрица сопряженного оператора равна $G^{-1}A^TG$.*

Следствие 1.5. *Сопряжение относительно фиксированной невырожденной билинейной формы является линейным отображением $\mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, причем $(AB)^T = B^TA^T$.*

Лемма 1.6. *Если форма g симметрическая, то $A \in \mathrm{O}(V,g) \iff A^T = A^{-1}$.*

Доказательство: $A \in \mathrm{O}(V,g) \implies g(v,v') = g(Av,Av') = g(v,A^TAv') \implies A^TA = \mathrm{Id}$. Аналогично, $A^TA = \mathrm{Id} \implies g(Av,Av') = g(v,A^TAv') = g(v,v') \implies A \in \mathrm{O}(V,g)$. $\square$

Часть 2. Самосопряженные операторы

Пусть теперь форма g симметрична или кососимметрична, и $\mathrm{char}\, K \neq 2$.

Лемма 2.1. *Сопряжение является инволюцией, то есть $A^{TT} = A$.*

Доказательство: $g(A^{TT}v,v') = \pm g(v',A^{TT}v) = \pm g(A^Tv',v) = g(v,A^Tv') = g(Av,v')$. $\square$

Определение 2.2. Оператор A называется самосопряженным относительно формы g, если $A^T = A$, и антисамосопряженным, если $A^T = -A$.

Лемма 2.3. *Всякий оператор единственным образом представляется в виде суммы сопряженного и антисамосопряженного оператора.*

Доказательство: $A = (A+A^T)/2 + (A-A^T)/2$. $\square$

Часть 3. Спектральная теорема (эрмитов случай)

Аналогичные определения можно дать для невырожденной эрмитовой формы. Оператор, сопряженный оператору A относительно эрмитовой формы h, определяется равенством $h(Av, v') = h(v, A^\dagger v')$ и является $\mathbb{C}$-линейным. При этом сопряжение $A \mapsto A^\dagger$ является антилинейной инволюцией. Оператор A называется самосопряженным, если $A^\dagger = A$. Оператор является унитарным $\iff A^\dagger = A^{-1}$.

Замечание 3.1. Самомопряженные операторы относительно симметрической билинейной формы также называются симметрическими, а относительно эрмитовой формы также называются эрмитовыми.

Теорема 3.2. *Пусть $K = \mathbb{C}$, h — положительно определенная эрмитова форма, и A — эрмитов оператор. Тогда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A диагональна.*

Доказательство: будем доказывать индукцией по размерности. Если $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Пусть $\dim V > 1$. Пусть v_1 — собственный вектор оператора A (он существует, так как $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнуто). Тогда $V = \mathbb{C}v_1 \perp \mathbb{C}v_1^\perp$, так как h положительно определена. Заметим, что если $v \in v_1^\perp$, то $h(v_1, Av) = h(v_1, A^\dagger v) = h(Av_1, v) = h(\lambda_1 v_1, v) = 0$, следовательно $A(v_1^\perp) \subset v_1^\perp$. Кроме того, ясно что ограничение A на $v_1^\perp$ является эрмитовым оператором относительно ограничения формы h. Значит, по предположению индукции, в $v_1^\perp$ найдется ортонормированный базис, в котором ограничение оператора A представляется диагональной матрицей. Дополняя его вектором $v_1/|v_1|$, получаем искомый ортонормированный базис пространства V. □

Множество собственных значений эрмитова оператора называется спектром.

Лемма 3.3. *Спектр эрмитова оператора — вещественный.*

Доказательство: выберем ортонормированный базис из собственных векторов. Пусть λ — собственное значение, соответствующее вектору v. Тогда $\lambda = h(\lambda v, v) = h(Av, v) = h(v, Av) = h(v, \lambda v) = \bar{\lambda}$. □

Следствие 3.4. *Пусть h и B — эрмитовы формы на векторном пространстве V, причем h положительно определена. Тогда найдется базис, в котором матрица Грама формы h — единична, а матрица Грама формы B — диагональна с вещественными числами на диагонали.*

Часть 4. Комплексификация и овеществление

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Комплексификацией V называется $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Лемма 4.1. *$V_{\mathbb{C}}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$.*

Доказательство: для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ отображение $V \times \mathbb{C} \to V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $(v, z) \mapsto v \otimes (\lambda z)$ очевидно $\mathbb{R}$-билинейно, следовательно индуцирует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\rho_\lambda : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, такое что $\rho_\lambda(v \otimes z) = v \otimes (\lambda z)$. Причем, легко видеть, что $\rho_\lambda \circ \rho_\mu = \rho_{\lambda\mu}$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Значит, отображения ρ_λ задают на $V_{\mathbb{C}}$ структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$. □

Лемма 4.2. *Если $\{e_p\}$ — базис V над $\mathbb{R}$, то $\{e_p \otimes 1\}$ — базис $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$, а $\{e_p \otimes 1, e_p \otimes i\}$ — базис $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{R}$.*

Доказательство: вторая часть следует из леммы 2.3 лекции 3, а первая часть — из второй. Действительно, всякий элемент в $V_{\mathbb{C}}$ можно представить в виде $\sum x_p(e_p \otimes 1) + \sum y_p(e_p \otimes i) = \sum (x_p + y_p i)(e_p \otimes 1)$. □

Следствие 4.3. $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{R}} V$.

Определение 4.4. Вещественной структурой на комплексном векторном пространстве W называется антилинейное отображение $B : W \to W$, такое что $B^2 = \mathrm{Id}$.

Легко видеть, что комплексификация всякого линейного пространства обладает канонической вещественной структурой $B(v \otimes z) = v \otimes \bar{z}$. Покажем, что верно и обратное.

Теорема 4.5. *Пусть W — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с вещественной структурой B. Пусть $V = W^B = \{\, w \in W \mid Bw = w \,\}$. Тогда V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $W \cong V_{\mathbb{C}}$, а B при этом изоморфизме отождествляется с канонической вещественной структурой на $V_{\mathbb{C}}$.*

Доказательство: пусть $V' = \{ w \in W \mid Bw = -w \}$. Ясно, что V и V' — $\mathbb{R}$-подпространства в W. Далее, $W \cong V \oplus V'$ (изоморфизм над $\mathbb{R}$), так как $w = (w + Bw)/2 + (w - Bw)/2$. Далее ясно что $w \in V \iff iw \in V'$, так как $Biw = \bar{i}Bw = -iBw$. Наконец, отображение $V \times \mathbb{C} \to W$, $(v, z) \mapsto zv$ очевидно $\mathbb{R}$-билинейно, следовательно индуцирует $\mathbb{R}$-линейное отображение $V_{\mathbb{C}} \to W$. Остается проверить, что это отображение биективно и согласовано с комплексными и вещественными структурами. □

Комплексификация — стандартный способ сводить линейную алгебру над полем $\mathbb{R}$ к линейной алгебре над полем $\mathbb{C}$.

Часть 5. Спектральная теорема (симметрический случай)

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а g — положительно определенная симметрическая форма.

Лемма 5.1. *Всякий самосопряженный оператор имеет вещественное собственное значение.*

Доказательство: рассмотрим комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ и определим на ней эрмитову форму h и оператор $A_{\mathbb{C}}$ формулами $h(v \otimes z, v' \otimes z') = z\bar{z}' g(v, v')$ и $A_{\mathbb{C}}(v \otimes z) = A(v) \otimes z$ (проверьте корректность!). Тогда форма h положительно определена, а оператор $A_{\mathbb{C}}$ — эрмитов. В самом деле, $h(v \otimes 1 + v' \otimes i, v \otimes 1 + v' \otimes i) = g(v, v) + g(v', v') > 0$ и $h(v \otimes z, A_{\mathbb{C}}(v' \otimes z')) = h(v \otimes z, A(v') \otimes z') = z\bar{z}' g(v, A(v')) = z\bar{z}' g(A(v), v') = h(A(v) \otimes z, v' \otimes z') = h(A_{\mathbb{C}}(v \otimes z), v' \otimes z')$. Значит, по лемме 3.3 оператор $A_{\mathbb{C}}$ имеет вещественное собственное значение. Наконец, выбирая базис в V легко видеть, что операторы A и $A_{\mathbb{C}}$ представляются одной и той же матрицей, следовательно, имеют одинаковые характеристические многочлены, и всякое собственное значение оператора $A_{\mathbb{C}}$ является собственным значением оператора A. □

Теорема 5.2. *Пусть A — самосопряженный оператор. Тогда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A диагональна.*

Доказательство: дословно повторяет доказательство теоремы 3.2 с использованием леммы 5.1. □

Следствие 5.3. *Пусть g и B — билинейные симметрические формы на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$, причем g положительно определена. Тогда найдется базис, в котором матрица Грама формы g — единична, а матрица Грама формы B — диагональна.*

Часть 6. Полярное разложение

Теорема 6.1. *Всякий невырожденный оператор A в евклидовом пространстве можно представить в виде $A = NS = S'N'$, где S, S' — самосопряженные операторы с положительным спектром, а N, N' — ортогональные операторы. Более того, операторы S, S', N, N' определены однозначно.*

Доказательство: ограничимся разложением $A = NS$ — второе разложение изучается аналогично. Рассмотрим оператор $A^T A$. Легко видеть, что он самосопряжен: $(A^T A)^T = A^T A^{TT} = A^T A$. Кроме того, $(A^T Av, v) = (Av, Av) = |Av|^2 > 0$, так как A невырожден. Значит, спектр оператора $A^T A$ положителен. Отсюда следует, что существует единственный самосопряженный оператор S с положительным спектром, такой что $S^2 = A^T A$ (можно выбрать ортонормированный базис, в котором $A^T A$ диагонален, и извлечь из элементов его матрицы корни). В частности, S — обратим. Наконец, $(AS^{-1})^T (AS^{-1}) = S^{-T} A^T AS^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \mathrm{Id}$, значит $N := AS^{-1}$ — ортогонален.

Проверим теперь однозначность. Действительно, если $A = NS$, то $A^T A = (NS)^T (NS) = S^T N^T NS = S^2$. Следовательно, оператор S определен однозначно условием положительности спектра, а в силу обратимости S оператор N также определен однозначно. □

Существует полярное разложение и для операторов в эрмитовом пространстве.

Теорема 6.2. *Всякий невырожденный оператор A в пространстве с положительно определенной эрмитовой формой h можно представить в виде $A = NS = S'N'$, где S, S' — эрмитовы с положительным спектром, а N, N' — унитарные операторы. Более того, операторы S, S', N, N' определены однозначно.*

Пример 6.3. В случае $V = \mathbb{C}$, $h(z, z') = z\bar{z}'$, полярное разложение оператора умножения на z совпадает с полярным разложением комплексного числа $z = re^{i\varphi}$.