Часть 1. Тензоры

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем K. Тензорное произведение $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (p сомножителей) называется p-ой тензорной степенью пространства V и обозначается $V^{\otimes p}$. При этом полагают $V^{\otimes 0} := K$, так что $V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \cong V^{\otimes (p+q)}$ при всех $p, q \geqslant 0$. Кроме того, часто рассматривают тензорное произведение $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$. Его элементы называются тензорами типа (p, q) на V. Многие алгебраические объекты и структуры описываются тензорами.

Примеры 1.1. 1. Векторы — это тензоры типа $(1, 0)$.
2. Функционалы — это тензоры типа $(0, 1)$.
3. Операторы — это элементы пространства $\mathrm{Hom}(V, V) \cong V^* \otimes V$, то есть тензоры типа $(1, 1)$.
4. Билинейные формы — это линейные отображения $V \otimes V \to K$, то есть элементы пространства $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$, то есть тензоры типа $(0, 2)$.

Лемма 1.2. *Если* $\{ e_i \}_{i=1}^n$ *— базис в* V, *то* $\{ e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \}_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q=1}^n$ *— базис в* $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$, *где* e^j *— векторы двойственного базиса в* V^*.

Доказательство: очевидно следует из лемм 1.5 и 2.3 лекции 3. □

Соответственно, всякий тензор может быть представлен набором своих координат относительно этого базиса: $T = \sum T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$. При этом обычно используют такую запись $T = (T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$. С некоторыми такими представлениями мы уже хорошо знакомы, с другими еще встретимся.

Примеры 1.3. 1. Координаты оператора (a^i_j) — это его матрица.
2. Координаты билинейной формы $(g_{i,j})$ — это ее матрица Грама.

Пусть $A \in V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ и $B \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ — тензоры типа (p, q) и (r, s) соответственно. Их тензорным произведением называется элемент $A \otimes B \in \left(V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}\right) \otimes \left(V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}\right) \cong V^{\otimes (p+r)} \otimes V^{*\otimes (q+s)}$.

Лемма 1.4. *Если* $A = (A^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$, $B = (B^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s})$, *и* $C = A \otimes B$, *то* $C^{i_1,\dots,i_p,i_{p+1},\dots,i_{p+r}}_{j_1,\dots,j_q,j_{q+1},\dots,j_{q+s}} = A^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} B^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$.

Следствие 1.5. *Операция* $\otimes$ *ассоциативна:* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

Замечание 1.6. Операция $\otimes$ на векторных пространствах коммутативна (в том смысле, что существует канонический изоморфизм $U \otimes V \cong V \otimes U$), однако операция $\otimes$ на тензорах уже некоммутативна. Действительно, если $u = (u_i)$, $v = (v_i)$, то $u \otimes v = (u_i v_j)$, а $(v \otimes u) = (v_i u_j)$, что не одно и то же!

Пусть $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant l \leqslant q$. Отображение $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q} = V^{\otimes (k-1)} \otimes V \otimes V^{\otimes (p-k)} \otimes V^{*\otimes (l-1)} \otimes V^* \otimes V^{*\otimes (q-l)} \cong \left(V^{\otimes (k-1)} \otimes V^{\otimes (p-k)} \otimes V^{*\otimes (l-1)} \otimes V^{*\otimes (q-l)}\right) \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{\mathrm{ev}} V^{\otimes (p-1)} \otimes V^{*\otimes (q-1)}$ называется сверткой тензора типа (p, q) по индексам (k, l). Будем обозначать его $\mathrm{ev}_{k,l}$.

Лемма 1.7. *Если* $A = (A^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$ *и* $B = \mathrm{ev}_{k,l}(A)$, *то* $B^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{q-1}} = \sum_{i=1}^n A^{i_1,\dots,i_{k-1},i,i_k,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_{l-1},i,j_l,\dots,j_{q-1}}$.

В терминах тензорного произведения и свертки записываются многие важные операции.

Лемма 1.8. *Пусть* A, B *— операторы,* v *— вектор, а* f *— функционал на векторном пространстве* V. *Тогда* $f(v) = \mathrm{ev}_{1,1}(v \otimes f)$, $Av = \mathrm{ev}_{2,1}(A \otimes v)$, $AB = \mathrm{ev}_{2,1}(A \otimes B)$.

Еще одной важной операцией является действие группы $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ на пространстве $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ (группа $\mathfrak{S}_p$ переставляет сомножители V, а группа $\mathfrak{S}_q$ — сомножители V^*).

Лемма 1.9. *Если* $A = (A^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $\tau \in \mathfrak{S}_q$ *и* $B = (\sigma, \tau)(A)$, *то* $B^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = A^{i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_p}}_{j_{\tau_1},\dots,j_{\tau_q}}$.

Часть 2. Симметрические и кососимметрические тензоры

Ограничимся в этом разделе рассмотрением тензоров типа $(n,0)$ над полем K характеристики 0.

Определение 2.1. Тензор $T \in V^{\otimes n}$ называется симметрическим, если $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ имеем $\sigma(T) = T$, и кососимметрическим, если $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ имеем $\sigma(T) = \varepsilon(\sigma)T$.

Пространство всех симметрических тензоров типа $(n,0)$ называется симметрической степенью и обозначается S^nV, а пространство всех кососимметрических тензоров типа $(n,0)$ называется внешней степенью и обозначается Λ^nV. Кососимметрические тензоры также называются поливекторами. Заметим, что $S^0V = \Lambda^0V = V^{\otimes 0} = K$, $S^1V = \Lambda^1V = V$.

Рассмотрим на пространстве $V^{\otimes n}$ оператор симметризации $\operatorname{Sym}(T) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(T)$ и оператор альтернирования $\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\sigma(T)$. Пусть $n \geqslant 2$.

Лемма 2.2. *Sym и Alt — ортогональные проекторы на подпространства $S^nV, \Lambda^nV \subset V^{\otimes n}$. То есть, $\operatorname{Sym}^2 = \operatorname{Sym}$, $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$, $\operatorname{Sym}\operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}\operatorname{Sym} = 0$, и $T \in S^nV \iff \operatorname{Sym}(T) = T$, $T \in \Lambda^nV \iff \operatorname{Alt}(T) = T$.*

Доказательство: заметим, что умножение на τ дает изоморфизм $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$, поэтому $\tau\circ\operatorname{Sym} = \operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}\circ\tau$, $\tau\circ\operatorname{Alt} = \varepsilon(\tau)\operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}\circ\tau$. Следовательно, $\operatorname{Sym}^2 = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\tau\circ\operatorname{Sym} = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{Sym} = \frac{1}{n!}n!\operatorname{Sym} = \operatorname{Sym}$. Аналогично доказываются равенства $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt}$, $\operatorname{Sym}\operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}\operatorname{Sym} = 0$. Пусть теперь $T \in \Lambda^nV$. Тогда $\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\sigma(T) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)^2T = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}T = \frac{1}{n!}n!T = T$. Если же $\operatorname{Alt}(T) = T$, то $\tau(T) = (\tau\circ\operatorname{Alt})(T) = \varepsilon(\tau)\operatorname{Alt}(T) = \varepsilon(\tau)T$, значит $T \in \Lambda^nV$. Аналогично, $\operatorname{Sym}(T) = T \iff T \in S^nV$. □

Следствие 2.3. *При $n \geqslant 2$ имеем $V^{\otimes n} = S^nV \oplus \Lambda^nV \oplus \operatorname{Ker}(\operatorname{Sym}+\operatorname{Alt})$. В частности, $V^{\otimes 2} = S^2V \oplus \Lambda^2V$.*

Доказательство: при $n = 2$ имеем $\operatorname{Sym}+\operatorname{Alt} = \frac{1}{2}(\operatorname{Id}+\tau) + \frac{1}{2}(\operatorname{Id}-\tau) = \operatorname{Id}$, где $\tau = (12) \in \mathfrak{S}_2$. □

Лемма 2.4. *Пусть $\dim V = N$ и $\{e_i\}_{i=1}^N$ — базис в V. Рассмотрим $e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_n} := \operatorname{Sym}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})$, $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n} := \operatorname{Alt}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n})$. Тогда $\{e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_n}\}_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant N}$ и $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}\}_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant N}$ образуют базисы в S^nV и Λ^nV соответственно.*

Доказательство: линейная независимость очевидна — если предположить, что некоторая линейная комбинация равна нулю, то окажется, что аналогичная линейная комбинация векторов $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}$ в $V^{\otimes n}$ равна нулю, что невозможно. Остается заметить, что всякий элемент $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}$ операторами Sym и Alt переводится либо в один из указанных выше элементов, либо в ноль. □

Следствие 2.5. $\dim S^nV = \binom{N+n-1}{n}$, $\dim\Lambda^nV = \binom{N}{n}$.

Следствие 2.6. *При $n > \dim V$ имеем $\Lambda^nV = 0$, а при $n = \dim V$ имеем $\Lambda^nV \cong K$.*

Теорема 2.7. *S^nV и Λ^nV являются универсальными объектами в категории симметрических и кососимметрических полилинейных отображений из $V\times\cdots\times V$.*

Доказательство: пусть $f : V\times\cdots\times V \to W$ — симметрическое полилинейное отображение. Тогда оно пропускается через линейное отображение $F : V^{\otimes n} \to W$, такое что $F(a) = F(\sigma(a))$ для любых $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $a \in V^{\otimes n}$. Следовательно, $F(a) = F(\operatorname{Sym}(a))$, следовательно, F пропускается через S^nV. □

Замечание 2.8. Эта теорема дает правильный способ определить S^nV и Λ^nV для векторных пространств положительной характеристики, а также для модулей над произвольными кольцами, как универсальные объекты в категории симметрических и знакопеременных полилинейных отображений из $V\times\cdots\times V$.

Лемма 2.9. *S^n и Λ^n — функторы.*

Доказательство: если $f : U \to V$ — линейное отображение, то $f^{\otimes n}(S^nU) \subset S^nV$, $f^{\otimes n}(\Lambda^nU) \subset \Lambda^nV$. □

Теорема 2.10. *Если $A : V \to V$ — оператор и $\dim V = n$, то Λ^nA — умножение на $\det A$.*

Доказательство: достаточно выбрать базис и сравнить формулы. □

В связи с этим принято обозначать старшую внешнюю степень пространства V через $\det V$, а старшую линейную степень линейного отображения f векторных пространств одной размерности через $\det f$.

Часть 3. Алгебры

Определение 3.1. Алгеброй (или K-алгеброй) называется векторное пространство над полем K со структурой кольца, такой что умножение — K-билинейно.

Примеры 3.2. 1. Поле K является алгеброй над собой, а также над любым своим подполем.
2. Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ является $\mathbb{R}$-алгеброй (но не $\mathbb{C}$-алгеброй!).
3. Кольцо многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$ является K-алгеброй.
4. Кольцо матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ является K-алгеброй.

Замечание 3.3. Есть более общее понятие R-алгебры, где R — произвольное коммутативное кольцо. По определению R-алгебра — это произвольное кольцо A и гомоморфизм колец $R \to Z(A)$.

Ясно, что структура алгебры на пространстве A определяется билинейным отображением $m : A\otimes A \to A$, удовлетворяющим условию ассоциативности $m\circ(m\otimes \mathrm{Id}) = m\circ(\mathrm{Id}\otimes m) : A\otimes A\otimes A \to A$, и отображением $e : K \to A$, таким что $m\circ(e\otimes\mathrm{Id}) = \mathrm{Id} = m\circ(\mathrm{Id}\otimes e) : A \to A$. Выберем базис $\{\, e_i \,\}$ в A, такой что $e_1 = e$. Координаты $c^k_{i,j}$ тензора m называются структурными константами алгебры A. Ясно, что A — алгебра $\iff$ $\sum_k c^k_{i,j}c^m_{k,l} = \sum_k c^k_{jl}c^m_{ik}$ и $c^k_{1,i} = c^k_{i,1} = \delta^k_i$. Однако, задавать структуру алгебры структурными константами на практике неудобно.

Рассмотрим пространства $T^\bullet(V) = \oplus_{n=0}^\infty V^{\otimes n}$, $S^\bullet(V) = \oplus_{n=0}^\infty S^nV$, $\Lambda^\bullet(V) = \oplus_{n=0}^\infty\Lambda^nV$ и введем на них операции $\otimes$, $\cdot$ и $\wedge$, где $a\cdot b := \mathrm{Sym}(a\otimes b)$, $a\wedge b := \mathrm{Alt}(a\otimes b)$, а операция $\otimes$ доопределена равенством $1\otimes a = a\otimes 1 = a$, где 1 — единица в $V^{\otimes 0} = K$. Элемент a, лежащий в n-ом слагаемом, будем называть однородным и определим его степень $|a| = n$.

Лемма 3.4. *Пространства $T^\bullet(V)$, $S^\bullet(V)$ и $\Lambda^\bullet(V)$ — алгебры.*

Доказательство: $(a\cdot b)\cdot c = \mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(a\otimes b)\otimes c)$. Докажем, что это равно $\mathrm{Sym}(a\otimes b\otimes c)$. Действительно,

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(a\otimes b)\otimes c) = \mathrm{Sym}\left[\left(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\tau(a\otimes b)\right)\otimes c\right] = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{Sym}\circ\tau(a\otimes b\otimes c) = \mathrm{Sym}(a\otimes b\otimes c),$$

где $n = |a|+|b|$, а в третьем члене мы рассматриваем $\mathfrak{S}_n$ как подгруппу в $\mathfrak{S}_{|a|+|b|+|c|}$, сосотящую из перестановок, неподвижных на последних $|c|$ элементах. Аналогично доказываются равенства $a\cdot(b\cdot c) = \mathrm{Sym}(a\otimes b\otimes c)$, $(a\wedge b)\wedge c = \mathrm{Alt}(a\otimes b\otimes c)$, $a\wedge(b\wedge c) = \mathrm{Alt}(a\otimes b\otimes c)$, из которых немедленно следует ассоциативность. $\square$

$T^\bullet(V)$, $S^\bullet(V)$ и $\Lambda^\bullet(V)$ называются тензорной, симметрической и внешней алгебрами пространства V.

Лемма 3.5. *Алгебра $S^\bullet(V)$ коммутативна, а $\Lambda^\bullet(V)$ суперкоммутативна, то есть $a\wedge b = (-1)^{|a||b|}b\wedge a$.*

Доказательство: тензоры $a\otimes b$ и $b\otimes a$ отличаются действием перестановки, знак которой равен $(-1)^{|a||b|}$. $\square$

Лемма 3.6. Sym *и* Alt *задают сюръективные гомоморфизмы алгебр $T^\bullet(V) \to S^\bullet(V)$ и $T^\bullet(V) \to \Lambda^\bullet(V)$.*

Доказательство: гомоморфность следует из определения операций $\cdot$ и $\wedge$, а сюръективность из леммы 2.2. $\square$

Лемма 3.7. *Ядра гомоморфизмов $\mathrm{Sym} : T^\bullet(V) \to S^\bullet(V)$ и $\mathrm{Alt} : T^\bullet(V) \to \Lambda^\bullet(V)$ порождаются подпространствами $\Lambda^2V \subset V\otimes V$ и $S^2V\subset V\otimes V$ соответственно.*

Доказательство: легко видеть, что векторы $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k}\otimes e_{i_{k+1}}\otimes\ldots\otimes e_{i_n} - e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_{k+1}}\otimes e_{i_k}\otimes\ldots\otimes e_{i_n}$ порождают $\mathrm{Ker\,Sym}$. Остается заметить, что они равны $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_{k-1}}\otimes(2e_{i_k}\wedge e_{i_{k+1}})\otimes e_{i_{k+2}}\otimes\ldots\otimes e_{i_n}$. Аналогично, векторы $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k}\otimes e_{i_{k+1}}\otimes\ldots\otimes e_{i_n} + e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_{k+1}}\otimes e_{i_k}\otimes\ldots\otimes e_{i_n} = e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_{k-1}}\otimes(2e_{i_k}\cdot e_{i_{k+1}})\otimes e_{i_{k+2}}\otimes\ldots\otimes e_{i_n}$ порождают $\mathrm{Ker\,Alt}$. $\square$

Теорема 3.8. *Тензорная алгебра является свободной алгеброй, симметрическая алгебра является свободной коммутативной алгеброй, а внешняя алгебра является свободной суперкоммутативной алгеброй.*

Доказательство: пусть A — произвольная алгебра, а $\mu_1 : V \to A$ — линейное отображение. Докажем, что существует единственный гомоморфизм алгебр $\mu_\bullet : T^\bullet(V) \to A$, продолжающий μ_1. Действительно, отображение $V\times\cdots\times V \to A$, $(v_1,\dots,v_n)\mapsto \mu_1(v_1)\cdot\ldots\cdot\mu_1(v_n)\in A$ билинейно, следовательно, пропускается через отображение $\mu_n : V^{\otimes n}\to A$. Легко видеть, что $\mu_\bullet = \oplus\mu_n : T^\bullet(V)\to A$ — гомоморфизм алгебр, причем однозначно определенный. Пусть теперь A — коммутативная алгебра. Тогда ясно, что $\mu_2(\Lambda^2V) = 0$, так как Λ^2V порождается бивекторами $v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1$, а $\mu_2(v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1) = \mu_1(v_1)\mu_1(v_2) - \mu_1(v_2)\mu_1(v_1) = 0$. Значит $\mu_\bullet$ пропускается через фактор по идеалу, порожденному пространством Λ^2V, то есть через $S^\bullet V$. $\square$