Часть 1. Пфаффианы

Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица размера $2n \times 2n$. Будем рассматривать A как матрицу Грама кососимметрической билинейной формы. Как известно, в подходящем базисе матрица Грама такой формы приводится к стандартному виду $A_m := \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $2m = r(A)$. Иначе говоря, существует обратимая матрица C, такая что $A = C^T A_m C$. Следовательно, $\det A = \det A_m (\det C)^2$. В частности, если A невырождена, то $m = n$, $\det A_n = 1$ и $\det A = (\det C)^2$. Таким образом, определитель матрицы A всегда является квадратом. И это не случайно!

Теорема 1.1. *Существует единственный с точностью до знака многочлен* $\mathrm{Pf} \in \mathbb{Z}[a_{ij}]_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n}$ *степени* n, *такой что для любой кососимметрической матрицы* A *имеем* $\det A = \mathrm{Pf}(A)^2$.

Доказательство: начнем с единственности. Если Pf_1 — многочлен, такой что $\mathrm{Pf}_1^2 = \det$, то $(\mathrm{Pf}_1 / \mathrm{Pf})^2 = 1$ в кольце $\mathbb{Q}(a_{ij})$ (поле частных кольца $\mathbb{Z}[a_{ij}]_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n}$), то есть $\mathrm{Pf}_1 = \pm \mathrm{Pf}$.

Докажем теперь существование. Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n}$. Матрица A, у которой на месте i, j при $i < j$ стоит a_{ij}, при $i > j$ стоит $-a_{ji}$, а при $i = j$ стоит 0, является кососимметрической матрицей с коэффициентами в поле K. Более того, ясно, что она невырождена (при подстановке $a_{ij} := \delta_{j,i+n}$ она превращается в невырожденную матрицу A_n). Следовательно, найдется невырожденная матрица C с коэффициентами в поле K, такая что $A = C^T A_n C$. Значит, $\det(A) = \det(C)^2$. Положим $\mathrm{Pf}(A) = \det(C)$. Тогда $\mathrm{Pf} \in \mathbb{Q}(a_{ij})$ и $\mathrm{Pf}^2 = \det \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$. Покажем, что $\mathrm{Pf} \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$. Действительно, так как $\mathbb{Q}(a_{ij})$ есть поле частных кольца $\mathbb{Z}[a_{ij}]$, то Pf можно записать в виде f/g, где $f, g \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$. Отсюда получаем равенство $f^2 = g^2 \cdot \det$ в кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$. Воспользуемся факториальностью кольца $\mathbb{Z}[a_{ij}]$. Раскладывая f, g и det на неприводимые множители и сравнивая степени, видим, что $g | f$, то есть $\mathrm{Pf} = f/g \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$. $\square$

Теорема 1.2. *Если целостное кольцо* A *факториально, то кольцо* $A[x]$ *тоже факториально.*

Обозначим через K поле частных кольца A. Тогда $K[x]$ — кольцо главных идеалов, в частности факториально. Кроме того, $A[x]$ — подкольцо в $K[x]$.

Лемма 1.3. *Если* $f(x)$ *неприводим в* $A[x]$, *то он неприводим и в* $K[x]$.

Доказательство: пусть $f(x) = g(x)h(x)$, $g, h \in K[x]$. Домножая на общий знаменатель коэффициентов g и h, получаем $af(x) = g_1(x)h_1(x)$, где $a \in A$, $g_1, h_1 \in A[x]$. Пусть p — неприводимый делитель a. Тогда A/pA — целостное кольцо (так как A факториально!), значит $A/pA[x]$ — тоже целостное, но в $A/pA[x]$ имеем $a = 0$, значит $g_1(x)h_1(x) = 0$, значит либо $g_1(x) = 0$, либо $h_1(x) = 0$, то есть либо $g_1(x) = pg_2(x)$ в $A[x]$, либо $h_1(x) = ph_2(x)$ в $A[x]$. Сокращая наше равенство на p и продолжая те же рассуждения, получаем равенство $f(x) = g'(x)h'(x)$ в $A[x]$, противоречащее неприводимости f. $\square$

Доказательство теоремы: пусть $p_1(x) \cdot \dots \cdot p_r(x) = q_1(x) \cdot \dots \cdot q_s(x)$, где p_i, q_j неприводимы в $A[x]$. Тогда по лемме они неприводимы и в $K[x]$, следовательно, в силу факториальности этого кольца имеем $r = s$ и после перенумерации имеем $p_i(x) = u_i q_i(x)$, где $u_i \in (K[x])^* = K^*$. Иначе говоря, $a_i p_i(x) = b_i q_i(x)$, где $0 \neq a_i, b_i \in A$ и $(a_i, b_i) = 1$. Применяя те же рассуждения, что и в лемме получаем, что всякий неприводимый делитель a_i должен делить либо b_i, либо q_i. Но первое невозможно по условию, а второе — в силу неприводимости q_i. Значит, a_i — единица. Аналогично, b_i — единица. $\square$

Следствие 1.4. *Кольца* $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *и* $K[x_1, \dots, x_n]$ *факториальны.*

Многочлен Pf, удовлетворяющий свойствам теоремы 1.1 и свойству $\mathrm{Pf}(A_n) = 1$, называется **пфаффианом**.

Примеры 1.5. 1. Если $n = 1$, то $\mathrm{Pf}(A) = a_{12}$.

2. Если $n = 2$, то $\mathrm{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

Часть 2. Поливекторы

Лемма 2.1. *Если $w \in \Lambda^k V$, а $\xi \in V^*$, то $\mathrm{ev}_{s,1}(w \otimes \xi) = \pm\,\mathrm{ev}_{t,1}(w \otimes \xi)$ при всех $1 \leqslant s, t \leqslant k$. Более того, тензор $\mathrm{ev}_{s,1}(w \otimes \xi) \in V^{\otimes(k-1)}$ кососимметричен.*

Доказательство: пусть $s > t$ и $\sigma = (t, t{+}1, \dots, s)$ (цикл). Тогда $\mathrm{ev}_{s,1}(w\otimes\xi) = \mathrm{ev}_{t,1}(\sigma(w)\otimes\xi) = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{ev}_{t,1}(w\otimes\xi)$. Далее, пусть $\tau \in \mathfrak{S}_{k-1}$ и пусть $i_s : \mathfrak{S}_{k-1} \to \mathfrak{S}_k$ изоморфизм на подгруппу перестановок, неподвижных в s. Тогда $\tau(\mathrm{ev}_{s,1}(w \otimes \xi)) = \mathrm{ev}_{s,1}(i_s(\tau)(w) \otimes \xi) = \mathrm{ev}_{s,1}(\varepsilon(i_s(\tau))w \otimes \xi) = \varepsilon(i_s(\tau))\,\mathrm{ev}_{s,1}(w \otimes \xi) = \varepsilon(\tau)\,\mathrm{ev}_{s,1}(w \otimes \xi)$. □

Для всяких $w \in \Lambda^k V$ и $\xi \in \Lambda^m V^*$ определим $w \vdash \xi := \mathrm{ev}_{1,1}(\mathrm{ev}_{1,1}(\dots(\mathrm{ev}_{1,1}(w \otimes \xi))\dots))$ $(\min(m,k)$-раз).

Лемма 2.2. *Если $k > m$, то $w \vdash \xi \in \Lambda^{k-m} V$, если $k < m$, то $w \vdash \xi \in \Lambda^{m-k} V^*$, а если $k = m$, то $w \vdash \xi \in K$.*

Доказательство: пусть, например, $k > m$. Пусть $i : \mathfrak{S}_{k-m} \to \mathfrak{S}_k$ — изоморфизм на подгруппу перестановок, неподвижных на $1, \dots, m$. Тогда $\tau(w \vdash \xi)) = i(\tau)(w) \vdash \xi = \varepsilon(i(\tau))w \vdash \xi = \varepsilon(\tau) w \vdash \xi$. □

Лемма 2.3. *Спаривание $\Lambda^k V \otimes \Lambda^k V^* \to K$, $(w, \xi) \mapsto w \vdash \xi$ невырождено и, значит, $\Lambda^k V^* \cong (\Lambda^k V)^*$.*

Доказательство: легко видеть, что $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \vdash (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}) = \delta^{j_1}_{i_1} \dots \delta^{j_k}_{i_k}/k!$. □

Замечание 2.4. При $k = 1$ спаривание $V \otimes V^* \to K$, $(w, \xi) \mapsto w \vdash \xi$ совпадает со стандартным $(w, \xi) \mapsto \xi(w)$.

Лемма 2.5. *Пусть $w \in \Lambda^k V$, $\xi_1 \in \Lambda^{m_1} V^*$, $\xi_2 \in \Lambda^{m_2} V^*$ и $m_1 + m_2 \leqslant k$. Тогда $(w \vdash \xi_1) \vdash \xi_2 = w \vdash (\xi_1 \wedge \xi_2)$.*

Доказательство: $(w \vdash \xi_1) \vdash \xi_2 = \mathrm{ev}(\mathrm{ev}(w\otimes\xi_1)\otimes\xi_2) = \mathrm{ev}(w\otimes\xi_1\otimes\xi_2)$, а $w \vdash (\xi_1\wedge\xi_2) = \mathrm{ev}(w\otimes\mathrm{Alt}(\xi_1\otimes\xi_2))$, поэтому достаточно показать, что $\mathrm{ev}(w \otimes \xi)$ является кососимметрической функцией от $\xi \in V^{*\otimes m}$. Действительно, если $\sigma \in \mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_k$, то $\mathrm{ev}(w \otimes \sigma(\xi)) = \mathrm{ev}(\sigma^{-1}(w) \otimes \xi) = \mathrm{ev}(\varepsilon(\sigma^{-1})w \otimes \xi) = \varepsilon(\sigma)\,\mathrm{ev}(w \otimes \xi)$. □

Определение 2.6. k-вектор $w \in \Lambda^k V$ называется разложимым, если $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, где $v_1, \dots, v_k \in V$.

Замечание 2.7. Векторы $v_1, \dots, v_k$ в определении разложимого вектора неоднозначно определяются k-вектором w, но подпространство в V, ими порожденное, уже определяется однозначно. Это следует, например, из следующей леммы (это подпространство состоит из всех векторов $v \in V$, таких что $w \wedge v = 0$).

Лемма 2.8. *Пусть $w \in \Lambda^k V$, $v_1, \dots, v_m \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_m \in V^*$ — линейно независимые наборы. Тогда $w \wedge v_1 = \dots = w \wedge v_m = 0 \iff w = w' \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_m$, $w \vdash \xi_1 = \dots = w \vdash \xi_m = 0 \iff w \in \Lambda^k(\langle \xi_1, \dots, \xi_m \rangle^\perp)$.*

Доказательство: для первого утверждения выберем базис в V, такой что $e_1 = v_1$, …, $e_m = v_m$, а для второго — такой, что $e^1 = \xi_1$, …, $e^m = \xi_m$, и перепишем условия в терминах координат w относительно индуцированного базиса в $\Lambda^k V$. □

Лемма 2.9. *Пусть $0 \neq w \in \Lambda^k V$. Тогда ранг отображения свертки $V^* \xrightarrow{w} \Lambda^{k-1} V$ не меньше чем k, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда w разложим.*

Доказательство: пусть U — ядро. Применяя несколько раз лемму 2.8 получаем, что $w \in \Lambda^k(U^\perp)$. Поэтому, если $\dim U > n-k$, то $\dim U^\perp < k$ и $\Lambda^k(U^\perp) = 0$. Если же $\dim U = n-k$, то $\Lambda^k(U^\perp)$ порождается разложимым k-вектором $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, где $v_1, \dots, v_k$ — произвольный базис в $U^\perp$. □

Следствие 2.10. *Пусть $0 \neq w \in \Lambda^k V$. Тогда ранг отображения свертки $\Lambda^{k-1} V^* \xrightarrow{w} V$ не меньше чем k, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда w разложим.*

Доказательство: достаточно показать, что это отображение двойственно по отношению к отображению из леммы с учетом изоморфизма $(\Lambda^{k-1} V)^* \cong \Lambda^{k-1} V^*$ леммы 2.3. Действительно, $\forall \xi_1 \in V^*, \xi_{k-1} \in \Lambda^{k-1} V^*$ имеем $(w \vdash \xi_{k-1})(\xi_1) = (w \vdash \xi_{k-1}) \vdash \xi_1 = w \vdash (\xi_{k-1} \wedge \xi_1) = \pm w \vdash (\xi_1 \wedge \xi_{k-1}) = \pm(w \vdash \xi_1) \vdash \xi_{k-1} = \pm(w \vdash \xi_1)(\xi_{k-1})$. □

Теорема 2.11. *k-вектор w разложим $\iff$ для любого $(k-1)$-ковектора $\xi \in \Lambda^{k-1} V^*$ имеем $w \wedge (w \vdash \xi) = 0$.*

Доказательство: $\Longrightarrow$) очевидно — если $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, то $w \vdash \xi \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ и $w \wedge (w \vdash \xi) = 0$.

$\Longleftarrow$) Предположим, что w неразложим. Тогда $\dim\{\, w \vdash \xi \,\} > k$. Выберем $k+1$ линейно независимых вектора $v_1, \dots, v_{k+1} \in \{\, w \vdash \xi \,\}$. Применяя лемму 2.8, получаем, что $w = w' \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$, что невозможно. □

Замечание 2.12. Уравнения $w \wedge (w \vdash \xi) = 0$, описывающие множество разложимых k-векторов, являются уравнениями второй степени от координат. Они называются уравнения Плюккера.