Часть 1. Категория представлений

Определение 1.1. K-линейным представлением группы G в векторном пространстве V над полем K называется гомоморфизм групп $\rho : G \to \mathrm{GL}(V;k)$. Размерностью представления ρ называется $\dim_K V$.

Иначе говоря, K-линейное представление — это действие группы G на векторном пространстве V K-линейными преобразованиями. Когда ясно, над каким полем рассматриваются представления, символ поля будет опускаться. Кроме того, часто опускается и символ ρ, и представлением называют само пространство, в котором действует группа.

Примеры 1.2.
1. Тождественное представление $\mathrm{Id} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$.
2. Тривиальное представление $1_G : G \to \mathrm{GL}(1;K)$, $g \mapsto 1$.
3. Знаковое представление $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(1;K)$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$.
4. Стандартное представление $\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$.

Определение 1.3. Гомоморфизм линейных представлений $\rho_1 \to \rho_2$ — это линейное отображение $f : V_1 \to V_2$, такое что $\forall g \in G$ имеем $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$. Гомоморфизмы представлений группы G также называются G-эквивариантными гомоморфизмами. Множество всех G-эквивариантных гомоморфизмов $V_1 \to V_2$ обозначается $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Легко видеть, что $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ — подпространство в пространстве $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.

Пример 1.4. Если T — (косо)симметрический тензор, то $K \xrightarrow{T} V^{\otimes n}$ — гомоморфизм из тривиального (знакового) представления $\mathfrak{S}_n$ в стандартное представление.

Лемма 1.5. *K-линейные представления группы G образуют категорию $\mathrm{Rep}_G(K)$.*

Говорят, что U — подпредставление в V, если U — подпространство в V, такое что $g(U) \subset U$ для всех $g \in G$. Предстваление V называется неприводимым, если оно не имеет подпредставлений, кроме 0 и V.

Пример 1.6. Тривиальное и знаковое представления группы $\mathfrak{S}_n$ неприводимы. Вообще, всякое одномерное представление неприводимо.

Пусть $\rho_U : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ — представления группы G. Тогда $\rho_U \oplus \rho_V : G \to \mathrm{GL}(U \oplus V)$, $g(u, v) = (gu, gv)$ — представление группы G, которое называется прямой суммой представлений ρ_U и ρ_V.

Лемма 1.7. *Прямая сумма представлений является произведением и копроизведением в категории Rep_G.*

Пусть $f : U \to V$ — гомоморфизм представлений группы G. Легко видеть, что $\mathrm{Ker}\, f \subset U$ является подпредставлением в U, а $\mathrm{Im}\, f \subset V$ — подпредставлением в V. Действительно, если $f(u) = 0$, то $f(gu) = gf(u) = g0 = 0$, а если $v = f(u)$, то $gv = gf(u) = f(gu)$. Наконец, если $U \subset V$ — подпредставление, то на факторпространстве V/U возникает каноническое представление группы G: $g(v + U) = gv + gU = gv + U$. Оно называется факторпредставлением.

Лемма 1.8. *Если $f : U \to V$ — гомоморфизм представлений, то $\mathrm{Im}\, f \cong U/\mathrm{Ker}\, f$.*

Пусть U и V — представления группы G. Формулы $g(u \otimes v) = gu \otimes gv$ и $(gf)(u) = g(f(g^{-1}u))$ задают структуру представления группы G в пространствах $U \otimes V$ и $\mathrm{Hom}(U, V)$ соответственно. В частности, двойственное представление определяется как $U^* := \mathrm{Hom}(U, 1_G)$. Легко видеть, что все эти операции функториальны. Вот еще один важный функтор. Пусть V — представление группы G. Определим подпространство инвариантов $V^G \subset V$ формулой $V^G = \{\, v \in V \mid gv = v\ \forall g \in G \,\}$.

Очень важной операцией является усреднение по группе, т. е. оператор $\mathrm{Sym}_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathrm{End}(V)$.

Лемма 1.9. *Если $\mathrm{char}\, K \not| |G|$, то Sym_G является G-эквивариантным проектором V на V^G.*

Доказательство: так же как и с оператором Sym проверяем, что $\forall h \in G$ $h \circ \mathrm{Sym}_G = \mathrm{Sym}_G = \mathrm{Sym}_G \circ h$. $\square$

Часть 2. Групповая алгебра

Пусть G — конечная группа. Рассмотрим векторное пространство $K[G]$ над полем K, с базисом $\{ e_g \}_{g \in G}$, занумерованным элементами группы G, и определим в нем операцию умножения формулой $(\sum_{g \in G} a_g e_g) \cdot (\sum_{h \in G} b_h e_h) = \sum_{g,h \in G} a_g b_h e_{gh}$. Легко видеть, что пространство $K[G]$ является K-алгеброй. Эта алгебра называется групповой алгеброй группы G. Заметим, что $\mathrm{Sym}_G \in K[G]$, если он имеет смысл.

Лемма 2.1. *Категория K-линейных представлений группы G эквивалентна категории $K[G]$-модулей.*

Доказательство: если V — линейное представление группы G, то на V вводится структура $K[G]$-модуля формулой $(\sum_{g \in G} a_g e_g) v = \sum_{g \in G} a_g g(v)$. Наоборот, если V — модуль над $K[G]$, то $g(v) := e_g v$ задает на V структуру представления группы G. Наконец, легко видеть, что гомоморфизмы представлений и гомоморфизмы $K[G]$-модулей — это одно и то же. $\square$

Легко видеть, что понятия ядра и образа морфизма представлений, подпредставления, факторпредставления, прямой суммы представлений — эквивалентны понятиям ядра и и образа морфизма модулей, подмодуля, фактормодуля, прямой суммы модулей над алегброй $K[G]$. Однако, тензорное произведение представлений не совпадает с тензорным произведением $K[G]$-модулей.

Замечание 2.2. Для краткости представления группы G часто называются G-модулями.

Очень важным представлением всякой группы G является ее представление в пространстве $K[G]$, которое задается формулой $g(\sum_{h \in G} a_h e_h) = \sum_{h \in G} a_h e_{gh}$, и соответствует свободному $K[G]$-модулю ранга 1. Это представление называется регулярным. Его размерность равна порядку группы G.

Часть 3. Теорема Машке

Определение 3.1. Представление V группы G называется вполне приводимым, если для любого подпредставления $U \subset V$ найдется подпредставление $U' \subset V$, такое что $V = U \oplus U'$.

Теорема 3.2. *Если группа G — конечна, а характеристика поля $\operatorname{char} K$ не делит порядок группы $|G|$, то всякое конечномерное представление группы G вполне приводимо.*

Доказательство: выберем произвольное дополнительное к U подпространство $U'' \subset V$ (не обязательно являющееся подпредставлением), и рассмотрим соответствующий проектор $p'' : V \to V$ (проектор на U вдоль U''). Далее, положим $p' := \mathrm{Sym}_G(p'') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p'' g^{-1}$. Заметим, что, во-первых, оператор p' эквивариантен, так как $h p' h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h g p'' g^{-1} h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' p'' g'^{-1} = p'$, во-вторых, $p'_{|U} = \mathrm{Id}_U$, так как $p'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p'' g^{-1} u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g g^{-1} u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u = u$, и наконец, $\operatorname{Im} p' = U$, так как $\operatorname{Im} g p'' g^{-1} = U$ для всех $g \in G$. Пусть теперь $U' = \operatorname{Ker} p'$. Тогда, во-первых, U' — подпредставление, так как $p'(hu') = hp'(u') = 0$ для всех $h \in G$, $u' \in U'$, во-вторых, $U' \cap U = 0$, так как $p'_{|U} = \mathrm{Id}_U$, и наконец, $\dim U' + \dim U = \dim \operatorname{Ker} p' + \dim \operatorname{Im} p' = \dim V$. Значит $V = U \oplus U'$, что и требовалось. $\square$

Примеры 3.3.

1. Пусть $G = \mathbb{Z}$, а $K = \mathbb{C}$. Легко видеть, что структура представления группы G в пространстве V определяется одним обратимым оператором $A : V \to V$ (а именно, $\rho_A(k) v = A^k v$). При этом представление вполне приводимо $\iff$ оператор A диагонализуем, то есть полупрост.
2. $G = \mathfrak{S}_2$, $\operatorname{char} K = 2$, $V = U^* \otimes U^*$ — пространство билинейных форм на $U = K^{\oplus 2}$ не вполне приводимо.

Замечание 3.4. Приведенный пример дает правильное определение полупростоты оператора над не алгебраически замкнутыми полями. А именно, оператор называется полупростым, если для всякого инвариантного подпространства найдется инвариантное дополнительное подпространство.

Следствие 3.5. *Если группа G — конечна, а характеристика поля K не делит порядок группы $|G|$, то всякое конечномерное представление группы G является прямой суммой неприводимых представлений.*

Возникает естественный вопрос об однозначности разложения представления в сумму неприводимых. На самом деле ясно, что однозначности быть не может.

Пример 3.6. Пусть $G = \{1\}$. Тогда представление группы G — это просто векторное пространство. Ясно, что единственное неприводимое представление — это одномерное пространство. При этом всякое пространство размерности > 1 может быть разложено в сумму одномерных далеко не одним способом!

Часть 4. Лемма Шура

В этой части ограничимся рассмотрением конечномерных представлений.

Лемма 4.1. (*i*) *Если U и V — неприводимые представления группы G, а $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_G(U,V)$, то f является изоморфизмом.* (*ii*) *Пусть V — неприводимое представление группы G, а $f \in \mathrm{End}_G(V)$. Если поле K алгебраически замкнуто, то $f = \lambda \,\mathrm{Id}_V$, $\lambda \in K$, то есть $\mathrm{End}_G(V) = K$.*

Доказательство: (*i*) ясно, что $\mathrm{Ker}\, f \subset U$ и $\mathrm{Im}\, f \subset V$ — подпредставления. Если $\mathrm{Ker}\, f = U$, то $f = 0$. Если $\mathrm{Im}\, f = 0$, то также $f = 0$. Значит, в силу неприводимости U и V имеем $\mathrm{Ker}\, f = 0$, $\mathrm{Im}\, f = V$, то есть f инъективно и сюръективно. Значит, f — изоморфизм векторных пространств и существует обратное линейное отображение f^{-1}. Наконец, очевидно, что f^{-1} является G-гомоморфизмом, обратным к f, следовательно f — изоморфизм.

(*ii*) Так как K алгебраически замкнуто, то оператор f имеет собственное значение $\lambda \in K$. Ясно, что оператор $f - \lambda \,\mathrm{Id}_V$ является G-гомоморфизмом, причем имеет нетривиальное ядро (соответсвующее собственное подпространство), следовательно он равен нулю. Значит, $f = \lambda \,\mathrm{Id}_V$. □

Замечание 4.2. В случае не алгебраически замкнутого поля K часть (*ii*) леммы Шура заменяется на утверждение, что алгебра $\mathrm{End}_G(V)$ — тело. Доказательство части (*ii*) по сути сводится к проверке того, что над алгебраически замкнутым полем не бывает нетривиальных тел.

Следствие 4.3. (*i*) *Если U и V — неприводимые представления группы G и $U \not\cong V$, то $\mathrm{Hom}_G(U,V) = 0$.* (*ii*) *Если U неприводимо, а K алгебраически замкнуто, то $\mathrm{Hom}_G(U^{\oplus m}, U^{\oplus n}) \cong \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$*

Пусть теперь V — вполне приводимое представление группы G, и $V = \oplus V_p$ — его разложение в сумму неприводимых. Пусть, далее $\rho : G \to \mathrm{GL}(U)$ — неприводимое представление группы G, а V_ρ — прямая сумма неприводимых компонент V_p, изоморфных представлению ρ. Ясно, что V_ρ — подпредставление в V и $V = \oplus_\rho V_\rho$ (прямая сумма по всем классам изоморфизма неприводимых представлений).

Лемма 4.4. *Подпредставление $V_\rho \subset V$ не зависит от исходного разложения представления V в сумму неприводимых, а зависит лишь от класса изоморфизма представления ρ.*

Доказательство: пусть $V = \oplus V'_q$ — другое разложение в сумму неприводимых. Рассмотрим отображение $f_{pq} : V'_q \to V \to V_p$ — композицию вложения и проекции, соответствующим разложениям в прямые суммы. Ясно, что f_{pq} — G-гомоморфизм. Значит, по лемме Шура f_{pq} равен нулю, если $V_p \not\cong V_q$. Поэтому всякое V'_q, изоморфное представлению ρ, содержится в V_ρ. Значит, $V'_\rho \subset V_\rho$. Аналогично, $V_\rho \subset V'_\rho$, то есть $V_\rho = V'_\rho$. □

Подпредставление V_ρ называется изотипической компонентой неприводимого представления ρ в представлении V. Ясно, что изотипическая компонента раскладывается в прямую сумму нескольких экземпляров представления ρ, причем кратность, $\mathrm{mult}_\rho(V)$, не зависит от разложения.

Следствие 4.5. *Всякое вполне приводимое представление единственным образом раскладывается в сумму изотепических компонент, каждая из которых является однозначно определенной кратностью соответствующего неприводимого представления: $V = \oplus_\rho \rho^{\oplus \,\mathrm{mult}_\rho(V)}$.*

Пример 4.6. Пространства $S^n V$ и $\Lambda^n V$ — не что иное, как изотипические компоненты тривиального и знакового представления группы $\mathfrak{S}_n$ в $V^{\otimes n}$.

Лемма 4.7. *Пусть V и W — вполне приводимые расслоения, а $f : V \to W$ — G-гомоморфизм. Тогда для любого неприводимого ρ имеем $f(V_\rho) \subset W_\rho$.*

Доказательство: разложим V и W в сумму неприводимых и воспользуемся леммой Шура. □

Обозначив через f_ρ ограничение f на компоненту V_ρ, мы видим, что $f = \oplus_\rho f_\rho$.

Следствие 4.8. *Если V и W — вполне приводимые представления над алгебраически замкнутым полем, то $\mathrm{Hom}_G(V,W) = \prod_\rho \mathrm{Mat}_{\mathrm{mult}_\rho(W)\times \mathrm{mult}_\rho(V)}(K)$. В частности, $\mathrm{mult}_\rho(V) = \dim \mathrm{Hom}_G(\rho, V)$.*

Таким образом, задача описания категории конечномерных представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, сводится к описанию множества классов изоморфизма неприводимых представлений. Этим мы и займемся в следующий раз.