# Проективные пространства

**1◇1.** Для $n$-мерного векторного пространства $V$ найдите размерность

**а)** пространства $S^dV^*$ всех однородных полиномов степени $d$ на $V$;

**б)** пространства $\bigoplus\limits_{d=0}^{m} S^dV^*$ всех (не обязательно однородных) полиномов степени $\leqslant m$ на $V$.

**1◇2 (Кривая Веронезе).** Отображение Веронезе $V^* \xrightarrow{v_d} S^dV^*$ переводит линейную форму $\ell$ в её $d$-тую степень $\ell^d$; При $\dim V = 2$ образ его проективизации $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\overline{v}_d} \mathbb{P}_d$ называется *кривой Веронезе* степени $d$. **а)** Содержится ли эта кривая в гиперплоскости?

**б)** Пусть в основном поле больше $d$ элементов. Верно ли, что линейная оболочка любых $k \leqslant (d+1)$ точек кривой Веронезе степени $d$ строго $k$-мерна?

**1◇3.** Пусть основное поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $C_d \subset \mathbb{P}_d$ — кривая веронезе степени $d$, как в предыдущей задаче. Опишите, из каких однородных многочленов степени $d$ состоят:

**а)** касательная прямая к $C$ в точке $\ell^d \in C$; **б)** соприкасающаяся плоскость в точке $\ell^d \in C$;

**в)** $k$-мерная соприкасающаяся плоскость в точке $\ell^d \in C$, $3 \leqslant k \leqslant (d-1)$;

**г)** $k$-мерная секущая плоскость, проходящая через точки $\ell_0^d, \ell_1^d, \dots, \ell_k^d \in C$, $3 \leqslant k \leqslant (d-1)$?

**1◇4.** Обозначим через $G_n^k(q)$ число $k$-мерных векторных подпространств в $n$-мерном векторном пространстве над полем из $q$ элементов. Явно выразите $G_n^k(q)$ в виде рациональной функции от $q$ и вычислите $\lim\limits_{q\to 1} G_n^k(q)$.

**1◇5.** Нарисуйте как выглядят[1] в стандартных картах $U_{x_0}$, $U_{x_1}$, $U_{x_2}$ на $\mathbb{P}_2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ кривые аффинное уравнение которых в карте $U_{x_0}$ имеет вид:

**а)** $y = x^3$ **б)** $y^2 = x^2(x+1)$.

**1◇6.** Рассмотрим школьную евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ как вещественную часть комплексной аффинной карты $U_{x_0} = \mathbb{C}^2$ на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}_2$. Верно ли, что евклидовы окружности можно описать как множество всех коник на $\mathbb{CP}_2$, которые проходят через 2 фиксированных точки на $\mathbb{CP}_2$ и имеют по крайней мере три точки в исходном $\mathbb{R}_2$? Найдите эти 2 точки (лежащие на всех окружностях).

**1◇7 (плоские проекции скрученной кубики).** Пусть $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V^*)$ будет пространством линейных форм от $(t_0, t_1)$ с точностью до пропорциональности, $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3V^*)$ — пространством кубических форм от $(t_0, t_1)$. Опишите проекцию кубики Веронезе $C \subset \mathbb{P}_3$:

**а)** из точки $t_0^3$ на плоскость, порождённую $3\,t_0^2t_1$, $3\,t_0t_1^2$, $t_1^3$

**б)** из точки $3\,t_0^2t_1$ на плоскость, порождённую $t_0^3$, $3\,t_0t_1^2$, $t_1^3$

**в)** из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость, порождённую $t_0^3$, $3\,t_0^2t_1$, $3\,t_0t_1^2$

(вычислите параметрическое представление для кривой-проекции и нарисуйте как она выглядит в различных аффинных картах, в частности выясните, будут ли у проекции особые точки).

**1◇8.** Верно ли, что всякая рациональная кривая степени $n$ на $\mathbb{P}_2$ является плоской проекцией кривой Веронезе $C_n \subset \mathbb{P}_n$?

**1◇9.** Докажите что неособая плоская кубическая кривая не рациональна.

**1◇10.** Всегда ли можно провести квадрику через

**а)** 5 точек на плоскости? **б)** 3 прямые в пространстве?

**1◇11.** Даны 4 попарно скрещивающиеся прямые **а)** в $\mathbb{CP}_3$ **б)** в $\mathbb{RP}_3$ **в)** в $\mathbb{C}^3$ **г)** в $\mathbb{R}^3$ Сколько прямых пересекает их все? Найдите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы при малых шевелениях.

[1] в частности, укажите особые точки, буде таковые имеются