Квадрики и коники.

2◇1. На евклидовой плоскости рассмотрим полярное преобразование относительно окружности, ограничивающей круг K. Циркулем и линейкой постройте полюс данной прямой, не пересекающей K, и поляру данной точки $p \notin K$.

2◇2. Опишите фигуру, образуемую в пространстве плоских коник всеми кониками, проходящими через точки $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 1 : 0)$, $c = (0 : 0 : 1)$, $d = (1 : 1 : 1)$. Напишите общее уравнение (с неопределёнными коэффициентами), задающее все такие коники. Опишите все особые коники в этом семействе.

2◇3. Неособая квадрика в $\mathbb{P}_n$ имеет матрицу Грама A. Найдите матрицу Грама двойственной квадрики в $\mathbb{P}_n^\times$ в двойственном базисе?

2◇4 (1–1 соответствия на неособой конике). Рассмотрим рациональную параметризацию неособой коники $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q \subset \mathbb{P}_2$. Назовём дробно линейным преобразованием коники биекцию $Q \longrightarrow Q$, индуцированную дробно линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$.

а) Рассмотрим какие-нибудь две точки $p_1, p_2 \in Q$ и прямую ℓ. Докажите, что композиция проекции Q из p_1 на ℓ и проекции ℓ из p_2 на Q является дробно линейным преобразованием коники. Найдите его неподвижные точки, и опишите, как оно действует на P_1 и p_2.

б) Докажите, что всякое дробно линейное преобразование коники получается описанным выше образом (многими разными способами). Как представляется в таком виде композиция двух преобразований описанного выше вида?

2◇5. Дана неособая коника $Q \subset \mathbb{P}_2$ и 3 точки A, B, C. Одной линейкой постройте треугольник, вписанный в Q со сторонами, последовательно проходящими[1] через A, B, C. Сколько решений имеет эта задача?

2◇6. Сформулируйте и решите задачу двойственную предыдущей.

2◇7 (2–2 соответствия на неособой конике). Аналогично зад. 2◇4, назовём соответствие на параметризованной конике $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q \subset \mathbb{P}_2$ алгебраическим типа m–n, если множество пар соответствующих точек, рассмотренное как подмножество $S \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, задаётся уравнением $f(x_0 : x_1\,,\; y_0 : y_1) = 0$, где f — неприводимый многочлен однородный степени m по x и однородный степени n по y. Убедитесь, что при 2–2 соответствии все точки, кроме конечного числа, имеют 2 образа и 2 прообраза.

2◇8. Пусть Q, R две гладких коники. Убедитесь, что правила:

а) «$x \longleftrightarrow y \iff (xy)$ касается R» **б)** «$x \longleftrightarrow y \iff T_x \cap T_y Q \in R$»

задают 2–2 соответствия на Q.

2◇9. Докажите, что всякое 2–2 соответствие на Q единственным образом представимо каждым из двух описанных выше способов.

2◇10 (поризм Понселе). Даны две гладких коники Q, R, такие что можно нарисовать m-угольник вписанный в Q и описанный около R. Верно ли, что тогда такой многоугольник будет рисоваться стартуя из любой (кроме, может, конечного множества) точки на Q в качестве одной из вершин?

---

[1] в том смысле, что прямые, на которых лежат стороны проходят через ...