Плюккер – Сегре – Веронезе

3◇1. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n$ $n+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_n$ и a, b, c, никакие $n+1$ из которых не лежат в гиперплоскости, обозначим через $\ell_i^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$ прямую, изображающую пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через все точки p_ν с $\nu \neq i$, и установим между ними дробно линейные изоморфизмы $\ell_i^\times \xrightarrow{\varphi_{ij}^{abc}} \ell_j^\times$, переводящие 3 проходящие через a, b, c гиперплоскости одного пучка в три аналогичных гиперплоскости другого. Докажите, что геометрическое место точек пересечения n-ок соответственных гиперплоскостей: $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ (где $H_i \in \ell_i^\times$ и $\varphi_{ij}^{abc}(H_i) = H_j \ \forall\, i,j$) есть рациональная кривая степени n, которая подходящим выбором координат в $\mathbb{P}_n$ отождествляется с кривой Веронезе (начните с $n = 2,\ 3\ \dots$).

3◇2. По Сегре, $\mathbb{P}_3$ с неособой квадрикой $Q \subset \mathbb{P}_3$ отождествляется с пространством линейных проективных преобразований $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ (из одного семейства прямолинейных образующих Q в другое), при этом точкам $p \in Q$ отвечают вырожденные преобразования (отображающие всё первое семейство в одну точку — проходящую через p прямую второго семейства). Опишите геометрически действие невырожденного преобразования, задаваемого точкой $p \notin Q$.

3◇3. Обозначим через $\ell_1^\times, \ell_2^\times \subset \mathbb{P}_3^\times$ два пучка плоскостей, проходящих через фиксированные прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$. Любые три точки a, b, c, никакие 2 из которых не лежат одновременно ни в одной из плоскостей из $\ell_1^\times$, $\ell_2^\times$, задают дробно линейный изоморфизм $\ell_1^\times \xrightarrow{\varphi^{abc}} \ell_2^\times$, переводящий три содержащие a, b, c плоскости из $\ell_1^\times$ в три соответствующих плоскости из $\ell_2^\times$. Какую фигуру заметут в пространстве линии пересечения $H \cap \varphi^{abc}(H)$ всех пар соответственных плоскостей? Рассмотрите оба случая:: **а)** $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ **б)** $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \varnothing$

3◇4 (спинорное разложение). Пусть $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$, где $\dim U_\pm = 2$ и $char(k) \neq 2$. Докажите, что $V^{\otimes 2} = \underbrace{\Big(\big(S^2U_-^* \otimes S^2U_+\big) \oplus \big(\Lambda^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\big) \Big)}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{\Big(\big(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\big) \oplus \big(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+\big) \Big)}_{\Lambda^2V}$.

3◇5. Рассмотрим неособую квадрику $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, заданную квадратичной формой g с поляризацией $\widetilde{g}$ и обозначим через $\Lambda^2\widetilde{g}$ индуцированную билинейную форму на Λ^2V, спаривающую разложимые бивекторы по формуле $\Lambda^2\widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2\,,\ w_1 \wedge w_2\,) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix}$ (проверьте, что она симметрична и невырождена). Опишите, что за прямые в $\mathbb{P}_3$ переходят при плюккеровом вложении в пересечение квадрики $\Lambda^2G \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ (изотропных векторов формы $\Lambda^2\widetilde{g}$) с квадрикой Плюккера $P = \mathrm{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$.

3◇6. В предыдущей задаче положим $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ (как в зад. 3◇4) и возьмём в качестве G квадрику Сегре. Докажите, что два семейства её прямолинейных образующих переходят при плюккеровом вложении в пару непересекающихся коник, высекаемых из $\mathrm{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ двумя дополнительными (2-мерными) плоскостями $\Lambda_- = \mathbb{P}\left(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\right)$ и $\Lambda_+ = \mathbb{P}\left(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+\right)$ (см. диаграмму)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Veronese}"] & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Segre}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-, U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Plücker}"] & P \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Veronese}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

3◇7. Могут ли 2×2 - миноры комплексной 2×4 - матрицы быть равны:

а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **б)** $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$