Примеры вычислений с многочленами

4◇1 (соотношения Лапласа). Для произвольного набора $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ возрастающих индексов положим $\#I \overset{\text{def}}{=} k$, $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum i_\nu$, $\widehat{I} \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$. Докажите, что для любой квадратной матрицы A и любых наборов I, K из $\#I = \#K = k$ её строк выполняется тождество: $\displaystyle\sum_J (-1)^{|K|+|J|} A_{IJ} A_{\widehat{K}\widehat{J}} = \delta_{IK} \cdot \det(A)$ (суммирование производится по всем наборам J из $\#J = k$ столбцов, через A_{IJ} обозначен минор матрицы A, сосредоточенный в строках I и столбцах J, а δ_{IK} — δ-символ Кронекера).

Указание. Обозначим через $e_I \overset{\text{def}}{=} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \in \Lambda^k V$ базисные грассмановы мономы внешней алгебры векторного пространства V с базисом $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$; для любых I, K с $\#I = n - \#K$ выразите $e_I \wedge e_K$ через $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ и посмотрите, во что превратится это выражение при замене базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n) \longmapsto A \cdot (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

4◇2. В кольце многочленов от элементов $n \times n$ - матрицы $A = (a_{ij})$:

а) вычислите $\dfrac{\partial^m \det A}{\partial a_{i_1 j_1}\, \partial a_{i_2 j_2} \cdots \partial a_{i_m j_m}}$

б) получите явные выражения для коэффициентов $t_{pq}(A, B)$ разложения Тейлора:

$$\det(\lambda A + \mu B) = \sum_{p+q=n} t_{pq}(A, B) \cdot \lambda^p \mu^q$$

Указание. сравните $t_{pq}(A, B)$ с $\operatorname{tr}\left(\Lambda^p A \cdot \widehat{\Lambda^q B}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\substack{IJ:\\ \#I=\#J=p}} (-1)^{|I|+|J|} A_{IJ} B_{\widehat{I}\widehat{J}}$

4◇3. Докажите, что следующие условия на однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^m V$ попарно равносильны: **а)** $\dim \operatorname{Span} \omega = m$, где $\operatorname{Span} \omega = \bigcap (U \subset V \mid \omega \in \Lambda^m U)$; **б)** $\omega \wedge v = 0$ для любого $v \in \operatorname{Span} \omega$; **в)** ω разложим, т. е. $\omega = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$ с $v_\nu \in V$.

4◇4 (соотношения Плюккера). Докажите, что образ $\operatorname{Gr}(m, V)$ при плюккеровом вложении в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ описывается системой квадратных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu+\mu} \cdot \omega_{j_1 \dots j_{\nu-1} j_{\nu+1} \dots j_{m+1}} \cdot \omega_{k_1 \dots k_{\mu-1} j_\nu k_\mu \dots k_{m-1}} = 0$$

на коэффициенты ω_I грассманова многочлена $\omega = \sum \omega_I e_I$ (по одному уравнению для каждой пары возрастающих мультииндексов J, K, таких что $\#J = (m+1)$, $\#K = (m-1)$; наборы $(j_1 \dots j_{\nu-1} j_{\nu+1} \dots j_{m+1}) = J \setminus \{j_\nu\}$ и $(k_1 \dots k_\mu j_\nu k_{\mu+1} \dots k_{m-1}) = K \cup \{j_\nu\}$, полученные удалением j_ν из J и вставкой его в K, также упорядочены по возрастанию).

4◇5. Верно ли, что для любых двух идеалов I, J произвольного коммутативного кольца с единицей **а)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **б)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **в)** $(I = \sqrt{I}\ \&\ J = \sqrt{J}) \Rightarrow IJ = \sqrt{IJ}$

4◇6. Докажите, что всякое подмножество в $\mathbb{C}^2$, заданное системой полиномиальных уравнений, представляет собой конечное объединение точек и алгебраических кривых[1].

4◇7. Опишите множество нулей $V(J)$ и идеал $I(V(J))$, состоящий из всех функций, обращающихся в нуль всюду на $V(J)$, для идеалов **а)** $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$ **б)** $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1)$ **в)** $J = (xy, (x - y)z)$ **г)** $J = (xy, yz, zx)$

4◇8. Пусть коммутативная алгебра B над коммутативным кольцом A конечно порождена как A-модуль. Докажите, что $\mathfrak{m}B \neq B$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$.

4◇9. Докажите, что всякое поле, которое конечно порождено как $\mathbb{Z}$-алгебра, конечно.

4◇10*. Докажите, что идеал, порождённый в $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ всеми однородными многочленами, обращающимися в нуль вдоль кубики Веронезе, не может быть порождён двумя элементами.

[1] алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$ определяется как фигура, задаваемая одним полиномиальным уравнением