Задачи по алгебре к 11 февраля 2003 г.

1. Докажите, что a) любое уравнение степени $\leqslant 4$ разрешимо в радикалах; b) общее уравнение степени $\geqslant 5$ неразрешимо в радикалах.

2. Докажите, что все группы порядка $\leqslant 10$ разрешимы.

3. Сформулируйте и докажите теорему о разрешимости в радикалах над полем положительной характеристики a) в сепарабельном случае; b) в общем случае.

4. Пусть L/K — сепарабельное расширение, а $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — все различные вложения $L \to \overline{K}$. Определим норму и след выражениями $\mathrm{N}_{L/K}(\beta) = \prod_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta)$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\beta)$. a) Докажите, что норма и след являются гомоморфизмами групп $\mathrm{N}_{L/K} : L^* \to K^*$, $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$. b) Если L/K сепарабельно, $[L:K] = n$, и $a \in K$, то $\mathrm{N}_{L/K}(a) = a^n$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = na$. c) Если $F \subset K \subset L$ — башня сепарабельных расширений, то $\mathrm{N}_{L/F} = \mathrm{N}_{K/F} \circ \mathrm{N}_{L/K}$, $\mathrm{Tr}_{L/F} = \mathrm{Tr}_{K/F} \circ \mathrm{Tr}_{L/K}$. d) Вычислите $\mathrm{N}_{L/K}(\alpha)$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$, если L/K — сепарабельно, $\mathrm{Irr}_{\alpha}^{K}(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ и $[L : K(\alpha)] = m$. e) Если определить $\mathrm{N}_{L/K}(\beta) = \left(\prod_{k=1}^{r} \sigma_k(\beta)\right)^{[L:K]_i}$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) = [L:K]_i \sum_{k=1}^{r} \sigma_k(\beta)$, то свойства a), b), c), d) будут выполняться также и для несепарабельных расширений.

5. (Построения циркулем и линейкой) На плоскости заданы оси координат и точка с координатами $(1,0)$; разрешается выполнять следующие действия: (1) проводить прямую через две отмеченные точки; (2) проводить через отмеченную точку окружность с центром в отмеченной точке; (3) отмечать точку пересечения двух линий. a) Докажите, что можно построить любую точку с рациональными координатами. b) Пусть фиксирована некотрая последовательность построений. Обозначим через K_s поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ координатами всех точек, отмеченных после s шагов. Докажите, что $[K_s : K_{s-1}] \leqslant 2$. c) Докажите, что для того, чтобы точку с координатами (x,y) можно было построить необходимо условие $[\mathbb{Q}(x,y) : \mathbb{Q}] = 2^n$, а если расширение $\mathbb{Q}(x,y)/\mathbb{Q}$ нормально, то оно и достаточно. d) Докажите невозможность трисекции угла и удвоения куба. e) Докажите, что правильный n-угольник можно построить т.т.т.к $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$, где $2 < p_1 < p_2 < \dots < p_m$ — простые числа вида $p_i = 2^{k_i} + 1$.